Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question...**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Écrire au centre de la première ligne de votre première feuille de composition, ainsi que de toutes les suivantes, vos nom, prénom, classe, référence de devoir et date selon le format `NOM-PRENOM-CPGE-BL1-DS18-JJ/MM/AAAA`, puis sur la ligne qui suit, tirer un trait sur toute la largeur de la ligne, et commencer votre devoir par le problème de votre choix et chaque problème doit commencer sur une nouvelle copie double.

Problème n° 1 | Fondamentaux de l'algèbre linéaire

Ce problème consiste en quatre exercices indépendants.

Partie A | Sous-espace vectoriels

Dans toute cette partie, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donné par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
On considère alors le sous-ensemble F de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ AM - A^2M = (0)\right\}$$

où l'on rappelle que (0) désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient-elle à F ?

Q3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q4. Justifier que la matrice A est inversible et explicitez A^{-1}.

Q5. On note $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que la famille $\mathcal{F} = (M_1, M_2)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q6. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (M_1, M_2)$ est une famille génératrice de F.
On pourra pour simplifier les calculs, faire intervenir la matrice A^{-1} en le justifiant.

Q7. Donner la dimension de F, en le justifiant.

Partie B | Application linéaire

Dans toute cette partie, on désigne par u_1 et u_2 les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 0, -1)$.
On considère alors l'application f donnée par :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z)\, u_1 + (x - y - z)\, u_2 \end{array}\right.$$

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ formée des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

Q8. Déterminer l'image par f du vecteur $u_3 = (0, 1, 1)$.

Q9. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q10. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Q11. Déterminer une base du noyau de f.

Q12. On considère alors φ l'application définie par : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & f\,(u) - 2u \end{array} \right.$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer l'expression de $\varphi(u)$ en fonction de x, y et z.

Q13. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q14. φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Partie C | Matrice d'une application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y + z, -2x + 3y + 2z, x - y) \end{array} \right.$

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ formée des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

Q15. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q16. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q17. Déterminer $(A - \mathrm{I}_3)^2$.

Q18. En déduire que A est inversible, et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I_3 et de A.

Q19. Que peut-on en déduire pour f ?

Partie D | Image et noyau d'une application linéaire

Dans toute cette partie, A désigne la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère alors l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AMA \end{array} \right.$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q20. La matrice A est-elle inversible ?

Q21. Déterminer les images par f des matrices I_2 et A.

Q22. Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

Q23. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Problème n° 2 | Fondamentaux sur les séries numériques

Partie A | Convergence et somme d'une série téléscopique

On s'intéresse ici à la convergence et à la somme de la série $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\ u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.

Q24. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer S_n en fonction de n.

Q25. Démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente, et en calculer sa somme.

Partie B | Avec des séries exponentielles

On s'intéresse ici à la convergence et à la somme de la série $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \dfrac{n+1}{n!}$.

Q26. À l'aide du critère de d'Alembert, montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Q27. Déterminer la somme de la série $\sum u_n$.

Partie C | Avec des séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$.
On s'intéresse ici à la convergence et à la somme de la série $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \left(n^2 - 1\right) q^n$.

Q28. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\, n^2 - 1 = an(n-1) + bn + c$.

Q29. Justifier alors que la série $\sum u_n$ est convergente.

Q30. Déterminer alors la somme de la série $\sum u_n$ en fonction de q.

Partie D | Convergence et somme d'une série téléscopique | BIS

Dans toute cette partie, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite numérique qui converge vers 0 et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c=0$.
On s'intéresse dans cette partie à la convergence et à la somme de la série $\sum u_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$$

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N},\, S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de S_n à l'aide du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q32. Justifier alors la convergence de la série $\sum u_n$, et en donner la somme.

Problème n° 3 | Étude de fonctions et séries numériques

On rappelle que l'on note $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$ et que l'on a $7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4$.
Dans tout ce problème, f désigne la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \times \ln(x) \end{array} \right.$

Partie A | Étude de la fonction f

Q33. Déterminer l'expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Q34. Déterminer les limites de la fonction $f'(x)$ aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.

Q35. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$, puis construire le tableau de variations complet de la fonction f'.

Q36. Calculer $f'(1)$, puis déduire de ce qui précède le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.

Q37. Déduire de ce qui précède les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Q38. Soit g la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par : $g : \left| \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$.
Démontrer que : $\forall x \in [2;+\infty[\,,\, g(x) > 0$.

Partie B | Étude d'une suite définie par la fonctionn f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$

Q39. Démontrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 2$.

Q40. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Q41. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Partie C | Étude d'une série définie par la fonction f

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

On admet que : $\forall x\in[2;+\infty[\,,\ 2\ln(x)\leq x\leq \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

Q42. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geq \dfrac{6-\mathrm{e}}{2}u_n$

Q43. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $0<\dfrac{1}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$.

Q44. Quelle est alors la nature de la série $\sum\dfrac{1}{u_n}$?