Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Écrire au centre de la première ligne de votre première feuille de composition, ainsi que de toutes les suivantes, vos nom, prénom, classe, référence de devoir et date selon le format `NOM-PRENOM-CPGE-BL1-DS18-JJ/MM/AAAA`, puis sur la ligne qui suit, tirer un trait sur toute la largeur de la ligne, et commencer votre devoir par le problème de votre choix et chaque problème doit commencer sur une nouvelle copie double.

Q 1| Éléments de réponse

C'est pas gagné pour tout le monde.

Problème n° 1 | Fondamentaux de l'algèbre linéaire

Ce problème consiste en quatre exercices indépendants.

Partie A | Sous-espace vectoriels

Dans toute cette partie, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donné par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On considère alors le sous-ensemble F de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ AM - A^2M = (0)\}$$

où l'on rappelle que (0) désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q2. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartient-elle à F ?

Q 2| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

puis on obtient que :
$$\begin{aligned} AP - A^2P &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (0) \end{aligned}$$
et donc par définition de F on que $P \in F$.

Q3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 3| Éléments de réponse

$F \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ **:** par construction de F.

Le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à F : en effet, la matrice nulle (0) est telle que :

$$\begin{aligned} A \times (0) - A^2 \times (0) &= (0) - (0) \\ &= (0) \end{aligned}$$

F **est stable par combinaison linéaire :** soient $\begin{cases} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ M_1 & \in & F \\ M_2 & \in & F \end{cases}$

On note $M_3 = \lambda M_1 + M_2$ et montrons que $M_3 \in F$, c'est à dire que $AM_3 - A^2M_3 = (0)$.
Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} AM_3 - A^2M &= A\left(\lambda M_1 + M_2\right) - A^2\left(\lambda_1 + M_2\right) \\ &= \lambda AM_1 + AM_2 - \lambda A^2M_1 - A^2M_2 \\ &= \lambda\left(AM_1 - A^2M_1\right) + \underbrace{AM_2 - A^2M_2}_{=(0) \text{ car } M_2 \in F} \\ &= \lambda \underbrace{\left(AM_1 - A^2M_1\right)}_{=(0) \text{ car } M_1 \in F} + (0) \\ &= (0) \end{aligned}$$

Q4. Justifier que la matrice A est inversible et explicitez A^{-1}.

Q 4| Éléments de réponse

Puisque $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que : $(A \text{ est inversible}) \quad \Leftrightarrow \quad (\det(A) \neq 0)$.
On a ici directement que :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \times 2 - 1 \times 1 \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible et on a d'après le cours que : $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q5. On note $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que la famille $\mathcal{F} = (M_1, M_2)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 5| Éléments de réponse

La famille $\mathcal{F}$ étant une famille de deux vecteurs non nuls et non colinéaires, par théorème, c'est une famille libre.

Q6. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (M_1, M_2)$ est une famille génératrice de F.
On pourra pour simplifier les calculs, faire intervenir la matrice A^{-1} en le justifiant.

Q 6| Éléments de réponse

La matrice A étant inversible, on a que :

$$\begin{aligned} \left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F\right) &\Leftrightarrow \left(AM - A^2M = (0)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(AM = A^2M\right) \\ &\Leftrightarrow \left(A^{-1}AM = A^{-1}A^2M\right) \\ &\Leftrightarrow (M = AM) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -d \\ c = c \\ d = d \end{cases} \text{ où } (c,d) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \left(M = \begin{pmatrix} -c & -d \\ c & d \end{pmatrix} \text{ où } (c,d) \in \mathbb{R}^2\right) \\ &\Leftrightarrow \left(M \in \operatorname{Vect}(M_1, M_2)\right) \end{aligned}$$

Q7. Donner la dimension de F, en le justifiant.

Q 7| Éléments de réponse

D'après ce qui précède, la famille $\mathcal{F}$ étant une famille libre et génératrice de F, elle en forme donc une base. Comme elle est formée de deux vecteurs, par définition F est de dimension 2.

Partie B | Application linéaire

Dans toute cette partie, on désigne par u_1 et u_2 les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (1,0,-1)$.
On considère alors l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z)\,u_1 + (x-y-z)\,u_2 \end{array} \right.$$

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ formée des vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

Q8. Déterminer l'image par f du vecteur $u_3 = (0,1,1)$.

Q 8| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{array}{rcl} f(u_3) & = & (0+1+1)\,u_1 + (0-1-1)\,u_2 \\ & = & 2u_1 - 2u_2 \\ & = & (0,2,2) \\ & = & 2u_3 \end{array}$$

Q9. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q 9| Éléments de réponse

Ensemble de départ et d'arrivée de f : on a $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$: par construction de f.

Caractère linéaire de f : soient $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ v_1 = (x,y,z) & \in & \mathbb{R}^3 \\ v_2 = (x',y',z') & \in & \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$ On pose $v_3 = \lambda v_1 + v_2$ avec $v_3 = (x'', y'', z'')$.

Montrons que $f(v_3) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$.

Par construction de v_3 on a que : $\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & \lambda x + x' \\ y'' & = & \lambda y + y' \\ z' & = & \lambda z + z' \end{array} \right.$

Par suite, un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} f(v_3) & = & (x''+y''+z'')\,u_1 + (x''-y''-z'')\,u_2 \\ & = & (\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z')\,u_1 + (\lambda x + x' - \lambda y - y' - \lambda z - z')\,u_2 \\ & = & (\lambda x + \lambda y + \lambda z + x' + y' + z')\,u_1 + (\lambda x - \lambda y - \lambda z + x' - y' - z')\,u_2 \\ & = & (\lambda x + \lambda y + \lambda z)\,u_1 + (x'+y'+z')\,u_1 + (\lambda x - \lambda y - \lambda z)\,u_2 + (x'-y'-z')\,u_2 \\ & = & (\lambda x + \lambda y + \lambda z)\,u_1 + (\lambda x - \lambda y - \lambda z)\,u_2 + \underbrace{(x'+y'+z')\,u_1 + (x'-y'-z')\,u_2}_{=ff(v_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{((x+y+z)\,u_1 + (x-y-z)\,u_1)}_{=f(v_1)} + f(v_2) \\ & = & \lambda f(v_1) + f(v_2) \end{array}$$

et donc f est bien linéaire.

Conclusion : $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ et f est linéaire, donc f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q10. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Q 10| Éléments de réponse

La famille $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, on sait que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
Un calcul direct donne que $f(e_1) = (2,1,-1)$, $f(e_2) = (0,1,1)$ et $f(e_3) = (0,1,1)$.
Par suite, il vient que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2))$ puisque $f(e_2) = f(e_3)$.
Par ailleurs, les deux vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ étant non nuls et non colinéaires, ils forment une famille libre.
Ainsi, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est une famille libre et génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$, donc par définition, elle en est une base.

Q11. Déterminer une base du noyau de f.

Q 11| Éléments de réponse

D'après le théorème du rang, on sait que= $\underbrace{\dim\left(\mathbb{R}^3\right)}_{=3} = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) + \underbrace{\dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)}_{=2}$.

Par suite, il vient que $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1$.
On remarque alors que : $\begin{array}{rcl} f((0,1,-1)) & = & (0+1+(-1))\,u_1 + (0-1+(-1))\,u_2 \\ & = & \overrightarrow{0} \end{array}$
et donc il vient que $(0,1,-1) \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(f)$ est la droite vectorielle engendrée par $(0,1,-1)$.

Q12. On considère alors φ l'application définie par : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & f(u) - 2u \end{array} \right.$
Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer l'expression de $\varphi(u)$ en fonction de x, y et z.

Q 12| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} f(u) & = & (x+y+z)(1,1,0) + (x-y-z)(1,0,-1) \\ & = & (x+y+z, x+y+z, 0) + (x-y-z, 0, -x+y+z) \\ & = & (2x+y+z, x+y+z, -x+y+z) \end{array}$
et par suite que : $\begin{array}{rcl} \varphi(u) & = & f(u) - 2u \\ & = & (2x+y+z, x+y+z, -x+y+z) - (2x, 2y, 2z) \\ & = & (y+z, -x-y-z, -3x-y-z) \end{array}$

Q13. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q 13| Éléments de réponse

On remarque que $\varphi = f - 2\mathrm{Id}$ où Id est l'application identité de $\mathbb{R}^3$ qui est linéaire.
Par suite φ étant combinaison linéaire de deux applications linéaires, φ est linéaire, et comme il est clair que $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q14. φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Q 14| Éléments de réponse

Il s'agit donc d'étudier la bijectivité de φ.
Comme φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace de dimension finie, on sait qu'il y a équivalence entre le caractère bijectif et le caractère injectif.
Par ailleurs, comme φ est une application linéaire, on sait que : (φ est injective) $\Leftrightarrow$ $\left(\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right)$.
Or on a vu à que $f(u_3) = 2u_3$ ce qui assure que $f(u_3) - 2u_3 = \overrightarrow{0}$ et donc que $\varphi(u_3) = \overrightarrow{0}$ et par suite que $u_3 \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$.
Par conséquent $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et donc φ n'est pas injective, et donc φ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Partie C | Matrice d'une application linéaire

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, -2x+3y+2z, x-y) \end{array} \right.$

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ formée des vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

Q15. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q 15| Éléments de réponse

Soient $\begin{cases} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u = (x,y,z) & \in & \mathbb{R}^3 \\ v = (x',y',z') & \in & \mathbb{R}^3 \end{cases}$. Posons $w = \lambda u + v$ et montrons que $f(w) = \lambda f(u) + f(v)$.

En notant $w = (x'', y'', z'')$, par construction de w on a : $\begin{cases} x'' & = & \lambda x + x' \\ y'' & = & \lambda y + y' \\ z'' & = & \lambda z + z' \end{cases}$

Par suite, un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} f(w) &= (y'' + z'', -2x'' + 3y'' + 2z'', x'' - y'') \\ &= (\lambda y + y' + \lambda z + z', -2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') + 2(\lambda z + z'), \lambda x + x' - (\lambda y + y')) \\ &= (\lambda y + y' + \lambda z + z', -2\lambda x - 2x' + 3\lambda y + 3y' + 2\lambda z + 2z', \lambda x + x' - \lambda y - y') \\ &= (\lambda y + \lambda z, -2\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda z, \lambda x - \lambda y) + \underbrace{(y' + z', -2x' + 3y' + 2z', x' - y')}_{=f(v)} \\ &= \lambda \underbrace{(y + z, -2x + 3y + 2z, x - y)}_{=f(u)} + f(v) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

ce qui assure donc que f est linéaire.
Par ailleurs, on a par construction de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et donc que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q16. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q 16| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $\begin{aligned} f(e_1) &= (0,-2,1) \\ f(e_2) &= (1,3,-1) \\ f(e_3) &= (1,2,0) \end{aligned}$

et donc par construction on a que : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q17. Déterminer $(A - \mathrm{I}_3)^2$.

Q 17| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que $A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, puis que $(A - \mathrm{I}_3)^2 = (0)$.

Q18. En déduire que A est inversible, et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I_3 et de A.

Q 18| Éléments de réponse

Comme $A\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3 A$, on peut écrire après développement que $A^2 - 2A + \mathrm{I}_3 = (0)$ ce qui assure que $A(2\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{I}_3$.
Par suite, A est donc inversible à droite, donc inversible et on a que $A^{-1} = 2\mathrm{I}_3 - A$.

Q19. Que peut-on en déduire pour f ?

Q 19| Éléments de réponse

Puisque une des représentations matricielles de f dans une base de $\mathbb{R}^3$ est une matrice inversible, par théorème, f est bijective, et c'est donc un automorphisme.

Partie D | Image et noyau d'une application linéaire

Dans toute cette partie, A désigne la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère alors l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AMA \end{array} \right.$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q20. La matrice A est-elle inversible ?

Q 20| Éléments de réponse

Les deux colonnes de A étant identique, la matrice A n'est pas inversible.

Q21. Déterminer les images par f des matrices I_2 et A.

Q 21| Éléments de réponse

Il est immédiat que $f(\mathrm{I}_2) = A^2$ et que $f(A) = A^3$ avec $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Q22. Déterminer une base et la dimension du noyau de f.

Q 22| Éléments de réponse

Recherche d'une famille génératrice : Par définition : $(M \in \mathrm{Ker}\,(f)) \quad \Leftrightarrow \quad (AMA = (0))$.

En notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a que $AMA = \begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d \\ a+b+c+d & a+b+c+d \end{pmatrix}$ et par suite par identification des coefficients, il vient que :

$$\begin{aligned}
(M \in \mathrm{Ker}\,(f)) \quad & \Leftrightarrow \quad (a+b+c+d=0) \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = -b-c-d \\ \quad b & = b \\ \qquad c & = c \\ \qquad\quad d & = d \end{cases}, \ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \\
& \Leftrightarrow \quad \left(M = \begin{pmatrix} -b-c-d & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \right) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)
\end{aligned}$$

ce qui donne que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Étude de la liberté de la famille génératrice : On note $K_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrons que la famille (K_1, K_2, K_3) est une famille libre.

Supposons que l'on ait $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$(\star) \ \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = (0)$$

La relation $(\star)$ devient donc : $\begin{pmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ce qui, par identification, amène trivialement à $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$ et donc que la famille (M_1, M_2, M_3) est une famille libre.

Base et dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$: la famille (M_1, M_2, M_3) est donc une famille libre et génératrice de $\mathrm{Ker}\,(f)$, elle en forme donc une base.

Comme elle est formée de 3 vecteurs, par définition on a que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 3$.

Q23. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Q 23| Éléments de réponse

f étant un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, d'après le théorème du rang on a que :

$$\underbrace{\dim\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right)}_{=4} = \underbrace{\dim\left(ker(f)\right)}_{=3} + \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$$

ce qui donne que $\dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = 1$ et donc que $\mathrm{Im}\,(f)$ est une droite vectorielle, donc engendrée par un seul vecteur. Comme on a que $f\,(A) = A^3$ avec $A^3 = 4A$, on a donc que $4A \in \mathrm{Im}\,(f)$ et donc que $A \in \mathrm{Im}\,(f)$ avec $A \neq (0)$ ce qui assure que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(A)$.

Problème n° 2 | Fondamentaux sur les séries numériques

Partie A | Convergence et somme d'une série téléscopique

On s'intéresse ici à la convergence et à la somme de la série $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\, u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\, S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.

Q24. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Déterminer S_n en fonction de n.

Q 24| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(n^2-1\right) - \ln\left(n^2\right)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left((n+1)(n-1)\right) - 2\ln\left(n\right)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(n+1\right) + \ln\left(n-1\right) - 2\ln\left(n\right)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\left(\ln\left(n+1\right) - \ln\left(n\right)\right) - \left(\ln\left(n\right) - \ln\left(n-1\right)\right)\right) \\
&= \left(\ln\left(n+1\right) - \ln\left(n\right)\right) - \left(\ln(2) - \ln(1)\right) \\
&= -\ln(2) + \ln\left(n+1\right) - \ln\left(n\right) \\
&= -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Q25. Démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente, et en calculer sa somme.

Q 25| Éléments de réponse

Il est immédiat que $\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc par composition que $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$.

Par suite, il vient que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2)$.

La suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ étant convergente, par définition, la série $\sum u_n$ est convergente, et on a en plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$.

Partie B | Avec des séries exponentielles

On s'intéresse ici à la convergence et à la somme de la série $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \dfrac{n+1}{n!}$.

Q26. À l'aide du critère de d'Alembert, montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Q 26| Éléments de réponse

La série $\sum u_n$ est une série à termes strictement positifs.

Un calcul direct donne que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} \times \dfrac{1}{n+1}$

Comme $\dfrac{n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et que $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par produit, il vient que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$.

Par suite, d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est convergente.

Q27. Déterminer la somme de la série $\sum u_n$.

Q 27| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{1}$, il vient par somme que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} + \mathrm{e} = 2\mathrm{e}$ et par suite que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = 2\mathrm{e}$.

Partie C | Avec des séries géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$.

On s'intéresse ici à la convergence et à la somme de la série $\sum u_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \left(n^2 - 1\right) q^n$.

Q28. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\, n^2 - 1 = an(n-1) + bn + c$.

Q 28| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n(n-1) - n - 1 = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$

et donc $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ convient.

Q29. Justifier alors que la série $\sum u_n$ est convergente.

Q 29| Éléments de réponse

D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(n-1)q^n - nq^n - q^n = q^2 \times n(n-1)q^{n-2} + q \times nq^{n-1} - q^n$

Comme $|q|<1$, les trois séries $\sum n(n-1)q^{n-2}$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum q^n$ sont convergentes.
Ainsi, comme le terme général de la série $\sum u_n$ est une combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes, la série $\sum u_n$ est convergente.

Q30. Déterminer alors la somme de la série $\sum u_n$ en fonction de q.

Q 30| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}u_k &= q^2\sum_{k=0}^{n}k(k-1)q^{k-2}+q\sum_{k=0}^{n}kq^{k-1}-\sum_{k=0}^{n}q^k\\ &= q^2\times 0+q^2\times 0+q^2\sum_{k=2}^{n}k(k-1)q^{k-2}+q\times 0+q\sum_{k=0}^{n}kq^{k-1}-\sum_{k=0}^{n}q^k\\ &= q^2\sum_{k=2}^{n}k(k-1)q^{k-2}+q\sum_{k=1}^{n}kq^{k-1}-\sum_{k=0}^{n}q^k\end{aligned}$$
On sait par ailleurs que $\sum_{k=2}^{n}k(k-1)q^{k-2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{2}{(1-q)^3}$, $\sum_{k=1}^{n}kq^{k-1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{(1-q)^2}$ et $\sum_{k=0}^{n}q^k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1-q}$ puisque $|q|<1$.
Par somme, on en déduit donc que : $\sum_{k=0}^{n}\left(k^2-1\right)q^k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{q^2}{(1-q)^3}+\frac{q}{(1-q)^2}-\frac{1}{1-q}$
Finalement, on a donc que $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\frac{q^2}{(1-q)^3}+\frac{q}{(1-q)^2}-\frac{1}{1-q}$.

Partie D | Convergence et somme d'une série téléscopique | BIS

Dans toute cette partie, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite numérique qui converge vers 0 et $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c=0$.
On s'intéresse dans cette partie à la convergence et à la somme de la série $\sum u_n$ où :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=av_n+bv_{n+1}+cv_{n+2}$$

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, c'est à dire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$.

Q31. Soit $n\in\mathbb{N}$. Donner une expression de S_n à l'aide du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 31| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n}(av_k+bv_{k+1}+cv_{k+2})\\ &= a\sum_{k=0}^{n}v_k+b\sum_{k=0}^{n}v_{k+1}+c\sum_{k=0}^{n}v_{k+2}\\ &= a\sum_{k=0}^{n}v_k+b\sum_{k=1}^{n+1}v_k+c\sum_{k=2}^{n+2}v_k\\ &= av_0+av_1+\sum_{k=2}^{n}v_k+bv_1+\sum_{k=2}^{n}v_k+bv_{n+1}+c\sum_{k=2}^{n}v_k+cv_{n+1}+cv_{n+2}\\ &= av_0+av_1+\underbrace{(a+b+c)}_{=0}\left(\sum_{k=2}^{n}v_k\right)+bv_1+bv_{n+1}+cv_{n+1}+cv_{n+2}\\ &= av_0+av_1+bv_1++bv_{n+1}+cv_{n+1}+cv_{n+2}\end{aligned}$$

Q32. Justifier alors la convergence de la série $\sum u_n$, et en donner la somme.

Q 32| Éléments de réponse

Comme $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par somme que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} av_0 + av_1 + bv_1$.
La suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ étant convergente, par définition la série $\sum u_n$ est convergente, et on a par ailleurs que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_k = av_0 + av_1 + bv_1$.

Problème n° 3 | Étude de fonctions et séries numériques

On rappelle que l'on note $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$ et que l'on a $7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4$.
Dans tout ce problème, f désigne la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \times \ln(x) \end{array} \right.$

Partie A | Étude de la fonction f

Q33. Déterminer l'expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Q 33| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} \forall x \in]0;+\infty[\,,\ f'(x) &= \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \times \frac{1}{x} \\ &= \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \\ f''(x) &= \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2} \end{aligned}$$

Q34. Déterminer les limites de la fonction $f'(x)$ aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.

Q 34| Éléments de réponse

Il est immédiat que $\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{\mathrm{e}}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui par somme donne que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Il est immédiat que $\mathrm{e}^x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{\mathrm{e}}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui par somme donne que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Q35. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$, puis construire le tableau de variations complet de la fonction f'.

Q 35| Éléments de réponse

On a que : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ f''(x) = \underbrace{\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\mathrm{e}}{x^2}}_{\geq 0}}_{\geq 0}$

Il vient alors que :

x	0	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$
Variations de f'	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

Q36. Calculer $f'(1)$, puis déduire de ce qui précède le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.

Q 36| Éléments de réponse

Comme on a $f'(1) = 0$, on en déduit le signe de $f'(x)$ à partir des variations de f' :

x	0		1		$+\infty$
Variations de f'	$\|\|$ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Q37. Déduire de ce qui précède les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Q 37| Éléments de réponse

Les questions précédentes donnent alors que :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\|\|$ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Q38. Soit g la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par : $g : \left| \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$.

Démontrer que : $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ g(x) > 0$.

Q 38| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ g'(x) = f'(x) - 1$.

Comme $f'(2) = \mathrm{e}^2 - \dfrac{\mathrm{e}}{2} = \mathrm{e}\left(\mathrm{e} - \dfrac{1}{2}\right) > 0$, compte-tenu de l'étude des variations de f' faite précédemment, on peut donc établir que :

x	2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	
Variations de g	$g(2)$	↗	

avec : $\begin{array}{rcl} g(2) & = & f(2) - 2 \\ & = & \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2 \end{array}$

Comme $\ln(2) < 1$, on a que $\mathrm{e}\ln(2) < \mathrm{e} < 3$ et donc que $-\mathrm{e}\ln(2) > -3$ puis $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) > -3 + \mathrm{e}^2$ où $\mathrm{e}^2 - 3 > 4$ il vient que $\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\ln(2) - 2 > \underbrace{4 - 2}_{=2}$ ce qui donne que $g(2) > 0$.

Par suite, la fonction g étant strictement croissante sur $[2;+\infty[$, il vient que : $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ g(x) > 0$.

Partie B | Étude d'une suite définie par la fonctionn f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$

Q39. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geq 2$.

Q 39| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $u_n \geq 2$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a que $u_0 = 2$ et comme $2 \geq 2$, on a bien que $u_0 \geq 2$ ce qui assure que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Par construction, on a que $u_{n+1} = f(u_n)$
Comme $u_n \in [2;+\infty[$ par hypothèse de récurrence et compte-tenu des variations de f sur $[1;+\infty[$ on a donc que $f(u_n) \geq f(2)$.
Or on a vu que $g(2) = f(2) - 2 > 0$ ce qui assure que $f(u_n) \geq f(2) > 2$ et donc que $u_{n+1} > 2$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q40. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Q 40| Éléments de réponse

Les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Un calcul direct donne que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) > 0$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= g(u_n) \\ &> 0 \end{aligned}$$

ce qui assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Q41. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Q 41| Éléments de réponse

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, compte-tenu du théorème de la limite monotone, seuls deux cas de figures peuvent se produire :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas majorée** et dans ce cas la suite diverge vers $+\infty$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est majorée** et dans ce cas la suite converge.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente vers un réel ℓ avec nécessairement $\ell \geq u_0 = 2$.
Par ailleurs, par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, la continuité de f assure alors que l'on a $f(\ell) = \ell$ avec $\ell \geq 2$. Or $f(\ell) - \ell > 0$ ce qui donne que $f(\ell) > \ell$ ce qui est absurde.
Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et elle est donc divergente vers $+\infty$ car elle est croissante.

Partie C | Étude d'une série définie par la fonction f

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

On admet que : $\forall x \in [2;+\infty[\,,\, 2\ln(x) \leq x \leq \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

Q42. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \geq \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$

Q 42| Éléments de réponse

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a que : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}\ln(u_n)$
Comme $u_n \geq 2$, on a donc $\mathrm{e}^{u_n} \geq 3u_n$ et $\ln(u_n) \leq \frac{1}{2}u_n$ donc $-\mathrm{e}\ln(u_n) \geq -\frac{\mathrm{e}}{2}u_n$
En sommant ces deux inégalités, il vient alors que $\mathrm{e}^{u_n} - \mathrm{e}\ln(u_n) \geq 3u_n - \frac{\mathrm{e}}{2}u_n$
ce qui assure bien que $u_{n+1} \geq \dfrac{6-\mathrm{e}}{u_n}$.

Q43. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 < \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$.

Q 43| Éléments de réponse

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par 2, il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n > 0$ et donc $0 < \dfrac{1}{u_n}$.
D'après la question précédente, on a que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{1}{u_{n+1}} < \dfrac{2}{6-\mathrm{e}} \times \dfrac{1}{u_n}$
Par un raisonnement de proche en proche :

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{1}{u_n} & < & \dfrac{2}{6-\mathrm{e}} \times \dfrac{1}{u_{n-1}} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\dfrac{1}{u_3} & < & \dfrac{2}{6-\mathrm{e}} \times \dfrac{1}{u_2} \\
\dfrac{1}{u_2} & < & \dfrac{2}{6-\mathrm{e}} \times \dfrac{1}{u_1}
\end{array}$$

on obtient que : $\dfrac{1}{u_n} < \underbrace{\dfrac{2}{6-\mathrm{e}} \times \dfrac{2}{6-\mathrm{e}} \times \ldots \times \dfrac{2}{6-\mathrm{e}}}_{n \text{ facteurs}} \dfrac{1}{u_1}$
et comme $u1 = 2$, il viendrait que : $\dfrac{1}{u_n} < \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n \times \dfrac{1}{2}$
ce qui est le résultat attendu et que l'on formaliserait à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Q44. Quelle est alors la nature de la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$?

Q 44| Éléments de réponse

Il est immédiat que $\left|\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right| < 1$, donc la série $\sum \left(\dfrac{2}{6-\mathrm{e}}\right)^n$ est une série géométrique convergente, et donc d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ est convergente.