Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Écrire au centre de la première ligne de votre première feuille de composition, ainsi que de toutes les suivantes, vos nom, prénom, classe, référence de devoir et date selon le format `NOM-PRENOM-CPGE-BL1-DS17-JJ/MM/AAAA`, puis sur la ligne qui suit, tirer un trait sur toute la largeur de la ligne, et commencer votre devoir par le problème de votre choix et chaque problème doit commencer sur une nouvelle copie double.

Problème n° 1 | Convergence d'une matrice

Dans tout ce problème, on considère deux réels r et s tels que $r > 0$ et $s \in]0;1]$, ainsi que trois suites de réels $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ et $(c_k)_{k\geq 1}$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} a_{k+1} = rb_k + rc_k \\ b_{k+1} = a_k \\ c_{k+1} = sb_k \end{cases}$

On désigne par M la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & r & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par F_k la matrice colonne $F_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$.

Partie A | Un premier résultat

Q2. Dans cette question uniquement, on suppose que les trois suites $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ et $(c_k)_{k\geq 1}$ sont toutes les trois convergentes vers trois réels respectivement notés a, b et c, tous trois strictement positifs.

Montrer que $r + rs = 1$.

Partie B |

Dans cette partie uniquement, on suppose qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et trois réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ tels que $P^{-1}MP = \Lambda$ où $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Q3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $G_k = P^{-1}F_k$. Montrer que l'on a $G_{k+1} = \Lambda G_k$.

Q4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer G_k en fonction de G_1 et de Λ en justifiant votre réponse.

Q5. Montrer que si $\lambda_1 > -1$ et $\lambda_3 < 1$, alors les coefficients de G_k tendent tous vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

Q6. Montrer que si $\lambda_1 > -1$ et $\lambda_3 < 1$, alors les coefficients de F_k tendent tous vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

Problème n° 2 | Étude d'une suite définie par une relation de récurrence non linéaire

Dans tout ce problème, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite donnée par les relations : $\begin{cases} x_0 & \in &]0;1[\\ \forall n\in\mathbb{N},\, x_{n+1} & = & x_n-(x_n)^2 \end{cases}$

Partie A | Convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q7. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q8. Déterminer les variations sur l'intervalle $[0;1]$ de la fonction $f : x \longmapsto x-x^2$ et expliciter $f([0;1])$.

Q9. En remarquant que $x_{n+1}=f(x_n)$, démontrer par récurrence sur n que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $[0;1]$.

Q10. Justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Q11. On admet que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\, 0<x_n\leq \dfrac{1}{n+1}$
Déterminer alors la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie B | Étude d'une suite construite à partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans toute ce qui suit, on désigne par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\, v_n=nx_n$.

Q12. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Q13. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer.

Q14. Montrer alors que $0<\ell\leq 1$.

Partie C | Étude d'une suite définie par une somme

Dans tout ce qui suit, on désigne par $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :

$$w_n=n\,(v_{n+1}-v_n) \text{ et } S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{w_k}{k}$$

Q15. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q16. Exprimer pour tout $n\in\mathbb{N}$, w_n en fonction de x_n et de v_n.

Q17. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell(1-\ell)$.

Problème n° 3 | Calculs de limites sans expression algébrique...

Dans tout ce problème, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R},\, f(x)=x^3+x$

Partie A | Caractère bijectif de f

Q18. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Q19. Construire le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Q20. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Pour toute la suite, on désigne alors par g la fonction réciproque de f.

Q21. Quel est le sens de variations de g ? Quelles sont ses limites aux bornes de son ensemble de définition ? Que vaut $g(0)$?

Q22. La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$? impaire ? Justifier votre réponse.

Q23. Justifier que : $\forall x\in\mathbb{R},\, g(x)+(g(x))^3=x$.

Partie B | Quelques calculs de limites

Q24. Déterminer la limite quand x tend vers 0 du quotient $\dfrac{x}{g(x)}$.

Q25. Déduire de ce qui précède que $\dfrac{g(x)-x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$.

Q26. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\dfrac{x}{(g(x))^3}$.

Q27. Déduire de ce qui précède que $\dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Partie C | D'autres calculs de limites...

On suppose qu'il existe une fonction h définie sur $]0;+\infty[$ telle que : $\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ g(x) = x^{\frac{1}{3}}\,(1+h(x))$.

Q28. Justifier que $h(x) \neq 0$ pour tout $x \in\,]0;+\infty[$.

Q29. Déterminer la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q30. Montrer que : $\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ 1+h(x) = -x^{\frac{2}{3}}\left(3h(x)+3\,(h(x))^2+(h(x))^3\right)$

Q31. En déduire que la fonction $x \longmapsto h(x)x^{\frac{2}{3}}$ possède une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

Problème n° 4 | Étude d'une suite définie par une fonction et un paramètre

Dans tout ce problème on désigne par a un réel strictement supérieur à 1, et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= a^{u_n} \end{cases}$

et on désigne par f_a la fonction donnée par : $f_a : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}\right.$

Partie A | Quelques résultats sur f_a et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q32. Quel est le signe du réel $\ln(a)$?

Q33. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $f_a(x)$ à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme népérien.

Q34. Déterminer les limites de f_a aux bornes de son ensemble de définition.

Q35. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $f_a'(x)$ en fonction de a et de x.

Q36. Déterminer alors les variations de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$.

Q37. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.

Q38. Peut-on dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?

Partie B | Étude de la fonction $x \longmapsto f_a(x) - x$

Pour tout ce qui suit, on désigne par g_a la fonction donnée par : $g_a : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_a(x) - x \end{array}\right.$

Partie B-1 | Variations et limites de g_a

Q39. Pour $x \in \mathbb{R}$, donner l'expression de $g_a'(x)$ puis démontrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\left(g_a'(x) > 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x > -\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right)$$

Q40. Déterminer les limites de g_a aux bornes de son ensemble de définition.

Q41. Déterminer une expression en fonction de a de $g_a(\alpha)$ où $\alpha = -\dfrac{\ln\left(\ln(a)\right)}{\ln(a)}$.

Partie B-2 | Cas $a \geq \mathrm{e}$

On suppose dans cette sous-partie uniquement que $a \geq \mathrm{e}$.

Q42. Quel est le signe de $-\dfrac{\ln\left(\ln(a)\right)}{\ln(a)}$? Justifier votre réponse.

Q43. Donner le tableau de variations de g_a sur $[0; +\infty[$, et en déduire le signe de g_a sur $[0; +\infty[$.

Partie B-3 | Cas $a < \mathrm{e}$

On suppose dans cette sous-partie uniquement que $a < \mathrm{e}$.

Q44. Quel est le signe de $-\dfrac{\ln\left(\ln(a)\right)}{\ln(a)}$? Justifier votre réponse.

Q45. Donner le tableau de variations de g_a sur $[0; +\infty[$.

Q46. En distinguant deux cas, que l'on identifiera, selon les valeurs de a en déduire le signe de g_a sur $[0; +\infty[$.

Partie B-3 | Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $a = \sqrt{2}$

On suppose dans cette sous-partie uniquement que $a = \sqrt{2}$ et on admet que $1 + \ln\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right) < 0$.

Q47. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2. Qu'en déduire pour cette dernière ?

Q48. Expliciter la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie C | Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On se propose dans cette question de déterminer les valeurs de a pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q49. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel noté ℓ, alors $g_a(\ell) = 0$.
En déduire alors que nécessairemet $a \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$.

Q50. Réciproquement, montrer que si $a \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q51. Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite convergente.