Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Écrire au centre de la première ligne de votre première feuille de composition, ainsi que de toutes les suivantes, vos nom, prénom, classe, référence de devoir et date selon le format `NOM-PRENOM-CPGE-BL1-DS17-JJ/MM/AAAA`, puis sur la ligne qui suit, tirer un trait sur toute la largeur de la ligne, et commencer votre devoir par le problème de votre choix et chaque problème doit commencer sur une nouvelle copie double.

Q 1| Éléments de réponse

C'est pas gagné pour tout le monde.

Problème n° 1 | Convergence d'une matrice

Dans tout ce problème, on considère deux réels r et s tels que $r > 0$ et $s \in]0;1]$, ainsi que trois suites de réels $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ et $(c_k)_{k\geq 1}$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} a_{k+1} = rb_k + rc_k \\ b_{k+1} = a_k \\ c_{k+1} = sb_k \end{cases}$

On désigne par M la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & r & r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par F_k la matrice colonne $F_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$.

Partie A | Un premier résultat

Q2. Dans cette question uniquement, on suppose que les trois suites $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ et $(c_k)_{k\geq 1}$ sont toutes les trois convergentes vers trois réels respectivement notés a, b et c, tous trois strictement positifs.

Montrer que $r + rs = 1$.

Q 2| Éléments de réponse

Par passage à la limite dans chacune des relations précédentes, il vient que : $\begin{cases} a = rb + rc \\ b = a \\ c = sb \end{cases}$ et en reportant $b = a$ et $c = sb$ dans la première relation, il vient que $a = ra + rsa$ et comme $a \neq 0$, on a bien que $r + rs = 1$.

Partie B |

Dans cette partie uniquement, on suppose qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et trois réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ tels que $P^{-1}MP = \Lambda$ où $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

Q3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $G_k = P^{-1}F_k$. Montrer que l'on a $G_{k+1} = \Lambda G_k$.

Q 3| Éléments de réponse

Puisque $P^{-1}MP = \Lambda$ en multipliant par G_k à gauche, il vient que $P^{-1}MPG_k = \Lambda G_k$.
Comme $G_k = P^{-1}F_k$, il vient donc que $P^{-1}MF_k = \Lambda G_k$.
Par ailleurs, il est immédiat que $F_{k+1} = MF_k$ ce qui donne que $P^{-1}F_{k+1} = \Lambda G_k$ et donc que $G_{k+1} = \Lambda G_k$.

Q4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer G_k en fonction de G_1 et de Λ en justifiant votre réponse.

Q 4| Éléments de réponse

On pourrait montrer par récurrence sur l'entier k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $G_k = \Lambda^{k-1}G_1$.

Q5. Montrer que si $\lambda_1 > -1$ et $\lambda_3 < 1$, alors les coefficients de G_k tendent tous vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

Q 5| Éléments de réponse

On montrerait par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{k-1} \end{pmatrix}$ et donc en notant $G_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, il vient que :
$G_k = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k-1}\alpha \\ \lambda_2^{k-1}\beta \\ \lambda_3^{k-1}\gamma \end{pmatrix}$.
Par construction, on aque $-1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < 1$ et donc tous les coefficients de G_k convergent vers 0 puisque $|\lambda_i| < 1$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Q6. Montrer que si $\lambda_1 > -1$ et $\lambda_3 < 1$, alors les coefficients de F_k tendent tous vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

Q 6| Éléments de réponse

Puisque $F_k = PG_k$ il vient alors que $PG_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc que $F_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Problème n° 2 | Étude d'une suite définie par une relation de récurrence non linéaire

Dans tout ce problème, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite donnée par les relations : $\begin{cases} x_0 \in]0;1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - (x_n)^2 \end{cases}$

Partie A | Convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q7. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q 7| Éléments de réponse

Les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par l'étude du signe de $x_{n+1} - x_n$.
Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n = \underbrace{-(x_n)^2}_{\leq 0}$
et donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q8. Déterminer les variations sur l'intervalle $[0;1]$ de la fonction $f : x \longmapsto x - x^2$ et expliciter $f([0;1])$.

Q 8| Éléments de réponse

f est clairement la restriction à l'intervalle $[0;1]$ d'une fonction polynôme de degré 2 qui s'annule en 0 et en 1 et donc le coefficient du terme de degré 2 est négatif.
On en déduit donc les variations de f sur $[0;1]$:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
Variations de f	0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ 0

On en déduit que $f([0;1]) = \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Q9. En remarquant que $x_{n+1} = f(x_n)$, démontrer par récurrence sur n que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $[0;1]$.

Q 9| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $u_n \in [0;1]$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a que $x_0 \in]0;1[$ par construction, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$. Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Par construction, on a que $x_{n+1} = f(x_n)$. Par hypothèse de récurrence $u_n \in [0;1]$ et comme $f([0;1]) = \left[0; \frac{1}{4}\right]$, il vient que $u_{n+1} \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \subset [0;1]$, ce qui assure que $u_{n+1} \in [0;1]$ et donc que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang n et héréditaire, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q10. Justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Q 10| Éléments de réponse

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q11. On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
Déterminer alors la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 11| Éléments de réponse

Puisque $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par le théorème d'encadrement, il vient que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie B | Étude d'une suite construite à partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans toute ce qui suit, on désigne par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = nx_n$.

Q12. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Q 12| Éléments de réponse

Les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par l'étude du signe de $v_{n+1} - v_n$.
On a directement que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)x_{n+1} - nx_n \\ &= (n+1)\left(x_n - (x_n)^2\right) - nx_n \\ &= nx_n - n(x_n)^2 - nx_n \\ &= \underbrace{x_n}_{>0}\underbrace{(1-(n+1)x_n)}_{\geq 0 \text{ car } x_n \leq \frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$
et par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Q13. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer.

Q 13| Éléments de réponse

On a que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
Il vient donc que : : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq nx_n \leq \dfrac{n}{n+1} \leq 1$
ce qui assure que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, et comme elle est croissante, elle est convergente.

Q14. Montrer alors que $0 < \ell \leq 1$.

Q 14| Éléments de réponse

La relation précdente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq 1$, donc par passage à la limite $0 \leq \ell \leq 1$.
Et on ne peut alors $\ell = 0$ compte-tenu de la croissance de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la valeur de son premier $v_1 = x_1 > 0$ par l'étude précédente.

Partie C | Étude d'une suite définie par une somme

Dans tout ce qui suit, on désigne par $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ les deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$w_n = n(v_{n+1} - v_n) \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{k}$$

Q15. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q 15| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\left(v_{k+1}-v_k\right)}{k}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(v_{k+1}-v_k\right)$$

$$= v_{n+1}-v_1$$

et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ, il vient que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - v_1$

Q16. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de x_n et de v_n.

Q 16| Éléments de réponse

Par construction : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = nv_{n+1} - v_n$

$$\begin{aligned} &= n(n+1)x_{n+1} - nv_n \\ &= n(n+1)\left(x_n - (x_n)^2\right) - nv_n \\ &= n^2x_n - n^2x_n^2 + nx_n - nx_n^2 - nv_n \\ &= -(v_n)^2 + v_n - v_nx_n \\ &= v_n\left(1 - x_n - v_n\right) \end{aligned}$$

Q17. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\,(1-\ell)$.

Q 17| Éléments de réponse

Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on en déduit par somme et produit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\ell\,(1-\ell)$.

Problème n° 3 | Calculs de limites sans expression algébrique...

Dans tout ce problème, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + x$

Partie A | Caractère bijectif de f

Q18. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Q 18| Éléments de réponse

f étant un polynôme de degré 3, ses limites en $\pm\infty$ sont données par celles de son monôme de plus haut degré, à savoir x^3.

On en déduit donc que : $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Q19. Construire le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Q 19| Éléments de réponse

Il est immédiat que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \underbrace{3x^2+1}_{>0}$

On en déduit donc le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$

Q20. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Pour toute la suite, on désigne alors par g la fonction réciproque de f.

Q 20| Éléments de réponse

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Q21. Quel est le sens de variations de g ? Quelles sont ses limites aux bornes de son ensemble de définition ? Que vaut $g(0)$?

Q 21| Éléments de réponse

La fonction f étant strictement croissante, par théorème, il en est de même pour g, et on a que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
De plus on a que $f(0) = 0$ donc $g(0) = 0$.

Q22. La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$? impaire ? Justifier votre réponse.

Q 22| Éléments de réponse

g est continue comme fonction réciproque d'une fonction continue.
f étant impaire, par théorème, il en est de même pour g.

Q23. Justifier que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + (g(x))^3 = x$.

Q 23| Éléments de réponse

Il est clair que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(g(x)) = (g(x))^3 + g(x)$.
Or $f(g(x)) = x$ puisque f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Partie B | Quelques calculs de limites

Q24. Déterminer la limite quand x tend vers 0 du quotient $\dfrac{x}{g(x)}$.

Q 24| Éléments de réponse

Puisque : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + (g(x))^3 = x$
il vient que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{g(x) + (g(x))^3}{g(x)} = \dfrac{x}{g(x)}$
c'est à dire que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ 1 + (g(x))^2 = \dfrac{x}{g(x)}$
Comme $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} g(0) = 0$ car g est continue en 0, et on en déduit donc que $\dfrac{x}{g(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Q25. Déduire de ce qui précède que $\dfrac{g(x) - x}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$.

Q 25| Éléments de réponse

Il est clair que : $\forall x \neq 0,\ \dfrac{g(x)-x}{x^3} = -\left(\dfrac{g(x)}{x}\right)^3$

et donc par composition des limites, il vient que $\dfrac{g(x)-x}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$

Q26. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\dfrac{x}{(g(x))^3}$.

Q 26| Éléments de réponse

Sur le même principe, on peut écrire que : $\forall x > 0,\ \dfrac{x}{(g(x))^3} = 1 + \dfrac{1}{(g(x))^2}$

Comme $g(x) \underset{\to x+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par inverse et somme, on en déduit que $\dfrac{x}{(g(x))^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc que $\dfrac{(g(x))}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q27. Déduire de ce qui précède que $\dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Q 27| Éléments de réponse

Par composition avec la fonction $t \longmapsto t^{\frac{1}{3}}$, il vient alors que $\dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

Partie C | D'autres calculs de limites...

On suppose qu'il existe une fonction h définie sur $]0;+\infty[$ telle que : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ g(x) = x^{\frac{1}{3}}(1+h(x))$.

Q28. Justifier que $h(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Q 28| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ h(x) = \dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} - 1$.

Si il existe $x \in]0;\infty[$ tel que $h(x) = 0$, alors on aurait $\dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} = 1$ et donc que $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Or cela amènerait que $x^{\frac{1}{3}} + x = x$ c'est à dire que $x^{\frac{1}{3}} = 0$ et comme $x \neq 0$, ce n'est pas possible. Donc il n'existe par $x \in]0;+\infty[$ tel que $h(x) \neq 0$.

Q29. Déterminer la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q 29| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ h(x) = \dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} - 1$.

Comme $\dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ par somme, il vient alors que $h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q30. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ 1 + h(x) = -x^{\frac{2}{3}}\left(3h(x) + 3(h(x))^2 + (h(x))^3\right)$

Q 30| Éléments de réponse

Il vient que : $\forall x > 0,\ x^{\frac{1}{3}}(1+h(x)) + \left(x^{\frac{1}{3}}(1+h(x))\right) = x$

qui donne alors après développement que : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ x^{\frac{1}{3}}(1+h(x)) = -x\left(3h(x) + 3(h(x))^2 + (h(x))^3\right)$

et donc que : $\forall x > 0,\ h(x) + 1 = -x^{\frac{2}{3}}\left(3h(x) + 3\left(h(x)\right)^2 + \left(h(x)\right)^3\right)$.

Q31. En déduire que la fonction $x \longmapsto h(x)x^{\frac{2}{3}}$ possède une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

Q 31| Éléments de réponse

De la relation précédente, on tire que : $\forall x > 0,\ \dfrac{h(x)+1}{3h(x) + 3\left(h(x)\right)^2 + \left(h(x)\right)^3} = -x^{\frac{2}{3}}$.
et donc que : $\forall x > 0,\ \dfrac{h(x)+1}{3 + 3h(x) + \left(h(x)\right)^2} = -h(x)x^{\frac{2}{3}}$.
Comme $h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par somme et quotient que $h(x)x^{\frac{2}{3}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{3}$.

Problème n° 4 | Étude d'une suite définie par une fonction et un paramètre

Dans tout ce problème on désigne par a un réel strictement supérieur à 1, et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= a^{u_n} \end{cases}$
et on désigne par f_a la fonction donnée par : $f_a : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array} \right.$

Partie A | Quelques résultats sur f_a et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q32. Quel est le signe du réel $\ln(a)$?

Q 32| Éléments de réponse

Puisque $a > 1$, par croissance de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$, on a que $\ln(a) > ln(1)$ et donc que $\ln(a) > 0$.

Q33. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $f_a(x)$ à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme népérien.

Q 33| Éléments de réponse

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$.

Q34. Déterminer les limites de f_a aux bornes de son ensemble de définition.

Q 34| Éléments de réponse

On sait que le domaine de définition de f_a est $]-\infty; +\infty[$.

Limite de f_a en $+\infty$: puisque $\ln(a) > 0$, on a clairement que $x\ln(a) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition $\mathrm{e}^{x\ln(a)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Limite de f_a en $-\infty$: puisque $\ln(a) > 0$, on a clairement que $x\ln(a) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc par composition $\mathrm{e}^{x\ln(a)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q35. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $f_a'(x)$ en fonction de a et de x.

Q 35| Éléments de réponse

La fonction f_a est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a'(x) = \ln(a)\mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

Q36. Déterminer alors les variations de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$.

Q 36| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) > 0$
Par suite, la fonction f_a est croissante sur $\mathbb{R}$.
On en déduit alors le tableau des variations de f_a sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f_a'(x)$	$+$	
Variations de f_a	0 $\nearrow$	$+\infty$

Q37. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Q 37| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $u_{n+1} \geq u_n$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : par construction on a $u_0 = 1$ et $u_1 = a^{u_0}$ c'est à dire que $u_1 = a$. Par hypothèse, $a > 1$ ce qui assure que $u_1 > u_0$ et qui donne que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$. Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Par construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a que $u_{n+2} = a^{u_{n+1}}$, c'est à dire que $u_{n+2} = f_a(u_{n+1})$.
Comme $u_{n+1} \geq u_n$ par hypothèse de récurrence, par croissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_a, il vient donc que $f_a(u_{n+1}) \geq f_a(u_n)$ et donc que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ pusique $u_{n+1} = f_a(u_n)$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Q38. Peut-on dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?

Q 38| Éléments de réponse

La question précédente montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Deux cas de figures se présentent alors :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est majorée :** dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers un réel.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas majorée :** dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle est divergente vers $+\infty$.

Partie B | Étude de la fonction $x \longmapsto f_a(x) - x$

Pour tout ce qui suit, on désigne par g_a la fonction donnée par : $g_a : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_a(x) - x \end{array} \right.$

Partie B-1 | Variations et limites de g_a

Q39. Pour $x \in \mathbb{R}$, donner l'expression de $g_a'(x)$ puis démontrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$(g_a'(x) > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x > -\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right)$$

Q 39| Éléments de réponse

Il est immédiat que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_a'(x) = f_a'(x) - 1$
Soit alors $x \in]0;+\infty[$. Puisque $\ln(a) > 0$, on a donc :

$$\begin{aligned}
(g_a'(x) > 0) &\Leftrightarrow \left(\ln(a)\mathrm{e}^{x\ln(a)} - 1 > 0\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\ln(a)\mathrm{e}^{x\ln(a)} > 1\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{x\ln(a)} > \frac{1}{\ln(a)}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x\ln(a) > \ln\left(\frac{1}{\ln(a)}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x\ln(a) > -\ln(\ln(a))\right)\\
&\Leftrightarrow \left(x > -\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right)
\end{aligned}$$

Q40. Déterminer les limites de g_a aux bornes de son ensemble de définition.

Q 40| Éléments de réponse

Limite en $-\infty$ de g_a : Par définition on a que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln(a)} - x$.
Comme $\ln(a) > 0$, on a que $\mathrm{e}^{x}\ln(a) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par somme il vient que $g_a(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Limite en $+\infty$ de g_a : Par définition, on a que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_a(x) &= \mathrm{e}^{x\ln(a)} - x\\
&= \mathrm{e}^{x\ln(a)}\left(1 - \frac{x}{\mathrm{e}^{x\ln(a)}}\right)
\end{aligned}$$

Par croissances comparées comme $\ln(a) > 0$, on a que $\frac{x}{\mathrm{e}^{x\ln(a)}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par somme que $1 - \frac{x}{\mathrm{e}^{x\ln(a)}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc par produit que $g_a(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Q41. Déterminer une expression en fonction de a de $g_a(\alpha)$ où $\alpha = -\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$.

Q 41| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
g_a(\alpha) &= \exp\left(\ln(a) \times \left(-\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right)\right) - \left(-\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\ln(\ln(a))} + \frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\\
&= \frac{1}{\ln(a)} + \frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\\
&= \frac{1 + \ln(\ln(a))}{\ln(a)}
\end{aligned}$$

Partie B-2 | Cas $a \geq \mathrm{e}$

On suppose dans cette sous-partie uniquement que $a \geq \mathrm{e}$.

Q42. Quel est le signe de $-\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$? Justifier votre réponse.

Q 42| Éléments de réponse

Comme $a > \mathrm{e}$, on a que $\ln(a) > 1$, et par suite que $\ln(\ln(a)) > 0$ et donc par quotient, il vient que $-\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)} < 0$.

Q43. Donner le tableau de variations de g_a sur $[0;+\infty[$, et en déduire le signe de g_a sur $[0;+\infty[$.

Q 43| Éléments de réponse

Comme $-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)} < 0$, d'après ce qui précède, $g_a'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$ puisque $-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \notin [0;+\infty[$.
On a en particulier que $g_a(0) = 1$.
Les variations de la fonction g_a sur $[0;+\infty[$ et son signe sont alors :

x	0	$+\infty$
Signe de $g_a'(x)$	$+$	
Variations de g_a	1 $\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g_a(x)$	$+$	

Partie B-3 | Cas $a < \mathrm{e}$

On suppose dans cette sous-partie uniquement que $a < \mathrm{e}$.

Q44. Quel est le signe de $-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$? Justifier votre réponse.

Q 44| Éléments de réponse

Puisque $1 < a < \mathrm{e}$, on a que $0 < \ln(a) < 1$ donc que $\ln(\ln(a)) < 0$ et donc que $-\ln(\ln(a)) > 0$, puis par quotient que $-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)} > 0$ puisque $\ln(a) > 0$.

Q45. Donner le tableau de variations de g_a sur $[0;+\infty[$.

Q 45| Éléments de réponse

Comme $-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)} > 0$, d'après ce qui précède, $g_a'(x)$ change de signe sur $[0;+\infty[$ en $-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$ puisque $-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \in [0;+\infty[$ dans ce cas.

x	0		$-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$		$+\infty$
Signe de $g_a'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g_a	1	$\searrow$	$\dfrac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$	$\nearrow$	$+\infty$

Q46. En distinguant deux cas, que l'on identifiera, selon les valeurs de a en déduire le signe de g_a sur $[0;+\infty[$.

Q 46| Éléments de réponse

D'après l'étude précédente, la fonction g_a admet un minimum en qui vaut $\dfrac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$.
Deux cas se présentent :

Si $\dfrac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \geq 0$ **:** la fonction g_a est toujours positive ou nulle sur $[0;+\infty[$.

Si $\dfrac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)} < 0$ **:** on applique alors le théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $\left[0;-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right]$ et $\left[-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)};+\infty\right[$.

Sur $\left[0;-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right]$ on a :

- g_a est continue sur cet intervalle ;
- g_a est strictement monontone sur cet intervalle ;
- $g_a(0)=1>0$ et $g_a\left(-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right)<0$ sont de signes opposés ;

donc d'aprèsl le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, g_a s'annule en un unique point noté α sur cet intervalle.

Sur $\left[-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)};+\infty\right[$ on a :

- g_a est continue sur cet intervalle ;
- g_a est strictement monontone sur cet intervalle ;
- $g_a\left(-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}\right)<0$ et on a que $g_a(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty>0$, ainsi ces deux éléments sont de signes opposés ;

donc d'aprèsl le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, g_a s'annule en un unique point noté β sur cet intervalle.

On en déduit donc le signe de g_a sur $[0;+\infty[$ selon les valeurs de a, la discussion portant sur le signe de $\dfrac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$.

Puisque $a>1$, on a $\ln(a)>0$ et donc :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}>0\right) &\Leftrightarrow (1+\ln(\ln(a))>0)\\ &\Leftrightarrow (\ln(\ln(a))>-1)\\ &\Leftrightarrow (\ln(a)>\mathrm{e}^{-1})\\ &\Leftrightarrow \left(a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}\right)\end{aligned}$$

Par suite on obtient :

Si $a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$ **:** g_a est de signe constant sur $[0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
Signe de $g_a(x)$	$+$	

Si $a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$ **:** on a alors que $-\dfrac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}=\mathrm{e}$, g_a est de signe constant sur $[0;+\infty[$, s'annule en e et ainsi :

x	0		e		$+\infty$
Signe de $g_a(x)$		$+$	0	$+$	

Si $a<\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$ **:** g_a change de signe sur $[0;+infty[$ en α et β :

x	0		α		β		$+\infty$
Signe de $g_a(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B-3 | Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $a=\sqrt{2}$

On suppose dans cette sous-partie uniquement que $a=\sqrt{2}$ et on admet que $1+\ln\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)<0$.

Q47. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2. Qu'en déduire pour cette dernière ?

Q 47| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $u_n \leq \sqrt{2}$ »
Montrons, par récurrence sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : on a $u_0 = 1$, et comme $1 \leq 2$ on a bien $u_0 \leq 2$ et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$. Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Par construction, on a que $u_{n+1} = f_a(u_n)$. Comme $u_n \leq 2$ par hypothèse de récurrence, par croissance de la fonction f_a sur $\mathbb{R}$, il vient que $f_a(u_n) \leq f_a(2)$. Or $f_a(2) = \mathrm{e}^{2\ln(\sqrt{2})}$ et donc $f_a(2) = 2$, ce qui assure que $u_{n+1} \leq 2$ et donc que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

On sait alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissance par ce qui précède, et comme elle est majorée, on en déduit qu'elle est convergente vers un réel que l'on notera ℓ pour la question suivante.

Q48. Expliciter la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 48| Éléments de réponse

Par construction, on a que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n \ln(a)}$
Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par composition, on a que $\mathrm{e}^{u_n \ln(a)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell\ln(a)}$. Aussi, comme $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, par unicité de la limite, il vient que $\ell = \mathrm{e}^{\ell\ln(a)}$.
Il vient alors que :
$$\begin{aligned}\left(\ell = \mathrm{e}^{\ell\ln(a)}\right) &\Leftrightarrow (g_a(\ell) = 0)\\ &\Leftrightarrow (\ell = \alpha \text{ ou } \ell = \beta)\end{aligned}$$
Or dans le cas où $a = \sqrt{2}$ comme c'est le cas ici, on peut montrer que $\alpha = 2$ et que $\beta = 4$.
Par suite, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2, il vient que $\ell = 2$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers 2.

Partie C | Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On se propose dans cette question de déterminer les valeurs de a pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q49. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel noté ℓ, alors $g_a(\ell) = 0$.
En déduire alors que nécessairemet $a \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$.

Q 49| Éléments de réponse

On reprend le même raisonnement que précédemment en notant ℓ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Par construction, on a que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n \ln(a)}$
Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ par composition, on a que $\mathrm{e}^{u_n \ln(a)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ell\ln(a)}$. Aussi, comme $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, par unicité de la limite, il vient que $\ell = \mathrm{e}^{\ell\ln(a)}$.
Il vient alors que : $\left(\ell = \mathrm{e}^{\ell\ln(a)}\right) \Leftrightarrow (g_a(\ell) = 0)$
Or par ce qui précède g_a ne s'annule que si $a \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$.

Q50. Réciproquement, montrer que si $a \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q 50| Éléments de réponse

Si $a = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$: g_a s'annule uniquement en e. On montrerait alors par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par e sur le même principe que précédemment, et donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et en reprenant le raisonnement précédent, que sa limite est e.

Si $a < \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$: g_a s'annule en α et β. On montrerait alors par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par α sur le même principe que précédemment, et donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et en reprenant le raisonnement précédent, que sa limite est α.

Q51. Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite convergente.

Q 51| Éléments de réponse

On en conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $a \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}}$.