Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Comme annoncé pour votre préparation, ce sujet est une compilation d'exercices et/ou de problèmes donnés lors des deux dernières années pour l'épreuve de mathématiques du concours BL-SES.

La note obtenue sera intégrée dans le calcul de votre moyenne semestrielle qu'à la seule condition que la note obtenue permette une amélioration de cette dernière.

Problème n° 1 | Deux exercices

Les deux parties ci-dessous consistent en deux exercices indépendants.

Partie A | Suites

Soient α et β deux réels. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} &= \dfrac{y_n+\alpha}{2} \\ y_{n+1} &= \dfrac{x_n+\beta}{2} \end{cases}$$

On définit ensuite deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = x_n - \frac{2\alpha+\beta}{3} \text{ et } w_n = y_n - \frac{\alpha+2\beta}{3}$$

Q1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n$ et $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$.

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n^2 + w_n^2 = \dfrac{v_0^2+w_0^2}{4^n}$.

Q3. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

Q4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

Partie B | Fonction de deux variables

On considère la fonction $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Q5. Quel est le domaine de définition de f ?

Q6. Que donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs (x,y) et $(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$?

Q7. Soit $a > 0$. Calculer $f(a,a)$, et justifier sans calcul supplémentaire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a) = 0$.

Q8. On suppose que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ où $r > 0$ et $\theta \in [0; 2\pi[$.
Exprimier $f(x,y)$ en fonction de r et de θ.

Q9. Que remarque-t-on ? Interpréter.

Problème n° 2 | Autour des matrices orthogonales

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. On notera $M^\top$ la matrice transposée d'une matrice M ; la notation usuelle ${}^tM$ est également tolérée mais il convient d'indiquer clairement sur quelle matrice porte la transposition, par exemple en séparant clairement les termes $M^\top\, M$ ou $M\ {}^tM$, ou éventuellement à l'aide de pararenthèses $\left(M^\top\right) M$ ou $M\left({}^tM\right)$.

On considère les deux propriétés suivantes pour des matrices :

Propriété $\mathcal{O}$: on dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{O}$ si ses colonnes $C_1, \ldots, C_n$ sont deux à deux orthogonales c'est à dire :

$$C_i^\top\, C_j = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} = 0 \text{ pour tout } i \neq j$$

Propriété $\mathcal{I}$: on dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{I}$ si $M^\top\, M = \mathrm{I}_n$ où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

Partie A | Étude d'un premier exemple

On considère la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q10. La matrice G vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{O}$? la propriété $\mathcal{I}$?

Q11. Déterminer le noyau de G.

Q12. Soit λ un réel non nul.
Montrer que λ est une valeur propre de G si, et seulement si, λ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Q13. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Q14. La matrice G est-elle diagonalisable ?

Partie B | À propos de la propriété $\mathcal{O}$

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \ldots, C_n$ ses colonnes.

Q15. Montrer que le coefficient d'indices i et j noté $\left(M^\top M\right)_{i,j}$ de $M^\top M$ est $\left(M^\top M\right)_{i,j} = C_i^\top C_j$.

Pour toute la suite de cette partie, on suppose que la matrice M vérifie la propriété $\mathcal{O}$.

Q16. Montrer que la matrice $M^\top\, M$ est diagonale.

Q17. Montrer que les coefficients diagonaux de $M^\top M$ sont positifs ou nuls.

Q18. Si $\left(M^\top\, M\right)_{j,j}$ est nul, que peut-on en déduire sur C_j ?

Q19. Montrer que M est inversible si, et seulement si, aucune de ses colonnes n'est entièrement remplie de 0.

Partie C | À propos de la propriété $\mathcal{I}$

Dans cette partie, on suppose que la matrice M vérifie la propriété $\mathcal{I}$.

Q20. Montrer que M est inversible.

Q21. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\mathcal{I}$. Montrer que $P^\top M P$ vérifie la propriété $\mathcal{I}$.

Partie D | Étude d'un deuxième exemple

On suppose désormais que $n = 3$.

On note $\langle u \,|v\rangle$ le produit scalaire de u avec v et on rappelle que la norme est donnée par $\|u\| = \sqrt{\langle u \,|u\rangle}$.
On fixe un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $x_3 \neq 0$, ainsi qu'un vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ de même norme que x et non colinéaire à x.
On définit par ailleurs $z \in \mathbb{R}^3$ par : $z = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$
On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q22. Montrer que $\|z\| = 0$ si, et seulement si, $A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Q23. Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Q24. En déduire que la dimension du noyau de l'application linéaire représentée par A est inférieure ou égale à 1.

Q25. Montrer que $z \neq (0, 0, 0)$.

Q26. Montrer que $\langle x \,|z\,\rangle = 0$ et $\langle y \,|z\,\rangle = 0$, puis que $\langle x + y \,|z\,\rangle = 0$ et $\langle x - y \,|z\,\rangle = 0$.

Q27. Montrer que la famille $(x + y, x - y, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q28. Pour toute la suite, on définit l'application linéaire $\ell : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par :

$$\ell\,(x + y) = x + y,\ \ell\,(x - y) = y - x,\ \text{ et } \ell\,(z) = z$$

Quelle est la matrice de ℓ dans la base $\left(\dfrac{x+y}{\|x+y\|}, \dfrac{x-y}{\|x-y\|}, \dfrac{z}{\|z\|}\right)$? On notera L cette matrice par la suite.

Q29. On note $P = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1+y_1}{\|x+y\|} & \dfrac{x_1-y_1}{\|x-y\|} & \dfrac{z_1}{\|z\|} \\ \dfrac{x_2+y_2}{\|x+y\|} & \dfrac{x_2-y_2}{\|x-y\|} & \dfrac{z_2}{\|z\|} \\ \dfrac{x_3+y_3}{\|x+y\|} & \dfrac{x_3-y_3}{\|x-y\|} & \dfrac{z_3}{\|z\|} \end{pmatrix}$.
Exprimer la matrice de ℓ dans la base canonique comme un produit de matrices.

Q30. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $\mathcal{I}$ et telle que $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Problème n° 3 | Quelques éléments d'analyse

Partie A | Étude d'une première fonction

On considère la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} \end{array} \right.$.

Q31. Justifier que la fonction f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q32. Montrer que f est paire.

Q33. Montrer que f et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f'.

Q34. Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$.

Q35. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Q36. Soit un réel $M > 0$. En effectuant le changement de variables $u = \mathrm{e}^{x}$, montrer que :

$$\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}^{M}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Q37. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Q38. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq f'(x) \leq 1$.

Q39. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$

Partie B | Étude d'une deuxième fonction

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$ converge.

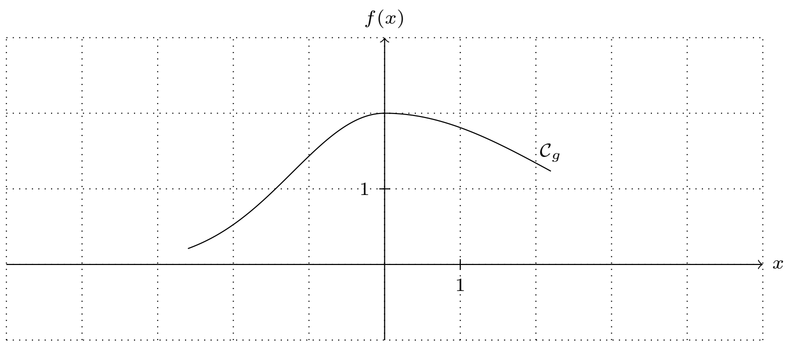
Q40. Justifier que g admet une limite en $-\infty$ et une limite en $+\infty$.

Q41. Montrer que ces deux limites sont toutes les deux non nulles.

Q42. Montrer qu'il existe exactement deux réels x_- et x_+ tels que $g(x_-) = g(x_+) = \dfrac{g(0)}{2}$.

Q43. On a tracé ci-dessous, en repère orthonormé, une partie du graphe d'une fonction g qui vérifie les hypothèses.

Recopier ce graphe et le compléter en faisant apparaître toutes les informations obtenues dans cette partie. On placera en particulier x_- et x_+.



Q44. Pour la suite de l'énoncé, on suppose de plus que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(y)| \leq |x-y|$$

Pour $A > 0$ et $L > 0$, on définit les fonctions $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$h(t) = g(t) + \sin(At) \text{ et } F(t) = \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} h(s)\,\mathrm{d}s \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Montrer que : $\quad F(t) - g(t) = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{t-L}^{t+L} (g(s) - g(t))\ \mathrm{d}s + \dfrac{\cos\left(A(t-L)\right) - \cos\left(A(t+L)\right)}{2LA}$.

Q45. Montrer que $\displaystyle\int_{t-L}^{t+L} |s-t|\ \mathrm{d}s = L^2$.

Q46. En déduire que $|F(t) - g(t)| \leq \dfrac{L}{2} + \dfrac{1}{LA}$.

Q47. Comment choisir $L > 0$ pour que $\dfrac{L}{2} + \dfrac{1}{LA}$ soit le plus petit possible, A étant fixé ?

Q48. On suppose pour toute la fin de cette partie que $A = 2\pi$ et que $L = 1$.
Exprimer F en fonction de g.

Q49. Recopier le tracé complet de la fonction g fait précédemment et dessiner également le graphe de la fonction h.