Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Réaliser l'entête de votre devoir en respectant les éléments suivants : inscrire en rouge et en majuscules en haut à gauche de la première copie double, vos nom et prénom tels qu'ils figurent sur votre dossier d'inscription en commençant au plus à 1 cm du bord gauche de la feuille et au plus à 3 cm du bord supérieur de la feuille, puis au même niveau sur la partie droite de la page, inscrire en anglais la date du devoir ; en sautant une ligne, sous votre nom, inscrire « CPGE-BL 1eannée » ; en laissant un espacement d'environ 2 cm par rapport à la dernière ligne écrite, inscrire en toutes lettres, et en respectant la casse, « Devoir surveillé n° 15 | Concours Blanc n° 1 » au centre de la ligne ; pour finir, laisser un espacement d'environ 2 cm par rapport à cette dernière ligne, tirer un trait horizontal sur la totalité de la largeur de la page, sous ce trait répondre, en justifiant votre réponse à la devinette suivante : « Le père Noël part pour sa tournée avec 6 rennes. Chaque renne transporte 3 lutins sur son dos et 2 lucioles sur ses cornes. Chaque lutin porte 3 sacs qui contiennent chacun 10 cadeaux. Combien d'êtres vivants partent pour la tournée de cadeaux ? »

Problème n° 1 | Étude de deux suites réelles

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

Partie A | Recherche de l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q2. Vérifier que $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{3}{4}$, puis calculer u_2 et v_2.

Q3. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_n - u_n$.
Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2} w_n$

Q4. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Q5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

Q6. Déduire de ce qui précède une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7. Vérifier que l'expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à la question précédente, est encore valable pour $n = 0$.

Partie B | Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q8. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Q9. Déterminer une expression du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Q10. Déduire de ce qui précède la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie C | Étude d'une suite définie par une somme

Dans toute cette partie α désigne un réel quelconque.
On considère alors les suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n) \ \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$$

Q11. Déterminer l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q12. Déduire de ce qui précède l'expression de S_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q13. Justifier que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si, et seulement si, $\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Q14. Dans le cas où $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, déterminer alors la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème n° 2 | Suites et puissances de matrices

Dans tout ce problème, M désigne la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivante : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies à l'aide des relations ci-dessous :

$$a_0 = 0,\ b_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 2b_n \end{cases}$$

Partie A | Recherche d'une expression de M^n

Q15. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$.

Q16. Déterminer une expression de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q17. Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.

Q18. On désigne alors par $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$.
Démontrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Q19. Déduire de ce qui précède une expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q20. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n2^{n-1}$.

Q21. Expliciter alors complètement M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie B | Application à un calcul de somme

Q22. Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a_{n+1} - a_n - 2^n$

Q23. Sans justification donner l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q24. Déduire de ce qui précède que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

Partie C | Application au calcul des puissances d'une autre matrice

' Dans tout ce qui suit, on considère les deux matrices A et P de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ données par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q25. Justifier que P est inversible, puis déterminer P^{-1}.

Q26. Démontrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P^{-1}A^nP$.

Q27. Déterminer alors une expression de A^n en fonction de P, P^{-1} et M^n.

Q28. Déduire de ce qui précède une expression de A^n en fonction de n.

Problème n° 3 | Étude d'une suite

Dans tout ce problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} & = & u_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n \end{array}\right.$

On se propose dans ce problème de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
On rappelle que l'on a : $\forall x \in]-1;+\infty[,\quad \ln(1+x) \leq x$.

Partie A | Préliminaire technique

On définit pour tout ce qui suit, la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$.

Q29. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

Q30. Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q31. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad s_n \leq 1$.

Partie B | Étude de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q32. Montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n > 0$.

Q33. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $u_{n+2} - u_{n+1}$, et en déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q34. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} \leq \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u_n$.

Q35. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} \leq u_1 \times \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$.

Q36. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un majorant de sa limite.

Problème n° 4 | Familles libres de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que l'on suppose être une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère alors la famille de vecteurs $\mathcal{G}_\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ définie par les relations :

$$\begin{cases} v_1 = (\alpha+1)\,u_1 + u_2 + u_3 \\ v_2 = u_1 + (\alpha+1)\,u_2 + u_3 \\ v_3 = u_1 + u_2 + (\alpha+1)\,u_3 \end{cases}$$

On se propose d'étudier le caractère libre de la famille $\mathcal{G}_\alpha$ en fonction de α.

Partie A | Étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $\alpha = -3$ et que $\mathcal{F}$ est donnée par : $\begin{cases} u_1 = (1,1,1) \\ u_2 = (1,-1,1) \\ u_3 = (1,0,-1) \end{cases}$.

Q37. Déterminer les vecteurs de la famille $\mathcal{G}_{-3}$.

Q38. Étudier la liberté de la famille $\mathcal{G}_{-3}$.

Partie B | Étude d'un second cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $\alpha = -1$.

Q39. On suppose que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ est tel que : $(\star) : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \overrightarrow{0}$.

Montrer alors que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système de représentation matricielle : $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Q40. Résoudre le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Q41. La famille $\mathcal{G}_{-1}$ est-elle une famille libre ? Si non, expliciter une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

Partie C | Étude du cas général

Q42. Déterminer en fonction de α, le rang de la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$.

Q43. Démontrer que $\mathcal{G}_\alpha$ est libre si, et seulement si, $\alpha^2\,(\alpha+3) \neq 0$.

CC BY NC ND