Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Comme annoncé pour votre préparation, ce sujet est une compilation d'exercices et/ou de problèmes donnés lors des deux dernières années pour l'épreuve de mathématiques du concours BL-SES.

La note obtenue sera intégrée dans le calcul de votre moyenne semestrielle qu'à la seule condition que la note obtenue permette une amélioration de cette dernière.

Problème n° 1 | Deux exercices

Les deux parties ci-dessous consistent en deux exercices indépendants.

Partie A | Suites

Soient α et β deux réels. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 \in \mathbb{R} \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= \dfrac{y_n+\alpha}{2} \\ y_{n+1} &= \dfrac{x_n+\beta}{2} \end{cases}$$

On définit ensuite deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = x_n - \frac{2\alpha+\beta}{3} \text{ et } w_n = y_n - \frac{\alpha+2\beta}{3}$$

Q1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n$ et $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$.

Q 1| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{2\alpha+\beta}{3} \\ &= \frac{y_n+\alpha}{2} - \frac{2\alpha+\beta}{3} \\ &= \frac{1}{2}y_n + \frac{3\alpha-4\alpha-2\beta}{6} \\ &= \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}\times\frac{-\alpha-2\beta}{3} \\ &= \frac{1}{2}\left(y_n - \frac{\alpha+2\beta}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = y_{n+1} - \frac{\alpha+2\beta}{3} \\ &= \frac{x_n+\beta}{2} - \frac{\alpha+2\beta}{3} \\ &= \frac{1}{2}x_n + \frac{3\beta-2\alpha-4\beta}{6} \\ &= \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}\times\frac{\beta+2\alpha}{3} \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n^2 + w_n^2 = \dfrac{v_0^2+w_0^2}{4^n}$.

Q 2| Éléments de réponse

Par ce qui préède il vient directement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1}^2 + w_{n+1}^2 = \frac{1}{4}w_n^2 + \frac{1}{4}v_n^2 = \frac{1}{4}\left(v_n^2 + w_n^2\right)$

ce qui assure que la suite de terme général $v_n + w_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0^2 + w_0^2$, ce qui amène donc à $v_n^2 + w_n^2 = \frac{1}{4}^n \left(v_0^2 + w_0^2\right)$.

Q3. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

Q 3| Éléments de réponse

Puisque $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ la suite géométrique de terme général $v_n^2 + w_n^2$ converge vers 0, et comme il s'agit d'une suite dont le terme général est la somme de deux termes positifs, la limite de ces deux termes est égale à 0, ce qui assure que les suites de termes généraux v_n^2 et w_n^2 convergent vers 0 et donc que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Q4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

Q 4| Éléments de réponse

De part leur définition, il vient directement que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2\alpha+\beta}{3}$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha+2\beta}{3}$.

Partie B | Fonction de deux variables

On considère la fonction $f : (x, y) \longmapsto \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Q5. Quel est le domaine de définition de f ?

Q 5| Éléments de réponse

L'expression $f(x, y)$ n'a de sens que si $x^2 + y^2 \geq 0$, ce qui est le cas, et si $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$ ce qui est acquis dès lors que $x^2 + y^2 \neq 0$ qui arrive dès lors que $(x, y) \neq (0, 0)$. Par suite f es définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Q6. Que donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs (x, y) et $(1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$?

Q 6| Éléments de réponse

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc que : $|\langle (x, y) \,|(1, 1)\rangle| \leq \|(x, y)\| \,\|(1, 1)\|$
ce qui donne que : $|x + y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

Q7. Soit $a > 0$. Calculer $f(a, a)$, et justifier sans calcul supplémentaire que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, a) = 0$.

Q 7| Éléments de réponse

Il est immédiat que $f(a, a)\,, = \sqrt{2}\frac{a}{|a|}$ et comme $|a| = a$ dans ce cas, que $f(a, a) = \sqrt{2}$.

La question précédent permet d'écrire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{|x+y|}$

Si $x + y < 0$ **:** il vient alors que $f(x, y) \geq \sqrt{2} \times \underbrace{\frac{x+y}{|x+y|}}_{=-1}$ et donc que $-\sqrt{2} \leq f(x, y) < 0$.

Si $x+y=0$ **:** $f(x,y)=0$

Si $x+y>0$ **:** il vient alors que $f(x,y) \leq \sqrt{2} \times \underbrace{\dfrac{x+y}{|x+y|}}_{=11}$ et donc que $0 \leq f(x,y) \leq \sqrt{2}$.

Par suite, f présente en (a,a) un extremum local, et donc y présente un point critique, et on a donc bien que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a)=0$.

Q8. On suppose que $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$ où $r>0$ et $\theta \in [0;2\pi[$.
Exprimer $f(x,y)$ en fonction de r et de θ.

Q 8| Éléments de réponse

On obtient alors que $f(x,y)=\cos(\theta)+\sin(\theta)$.

Q9. Que remarque-t-on ? Interpréter.

Q 9| Éléments de réponse

Le changement de variables précédent permet de voir f comme une fonction d'une seule variable, dont l'étude conduira à établir qu'elle présente des maximums locaux en $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

Problème n° 2 | Autour des matrices orthogonales

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. On notera $M^\top$ la matrice transposée d'une matrice M ; la notation usuelle ${}^tM$ est également tolérée mais il convient d'indiquer clairement sur quelle matrice porte la transposition, par exemple en séparant clairement les termes $M^\top M$ ou $M\ {}^tM$, ou éventuellement à l'aide de pararenthèses $\left(M^\top\right)M$ ou $M\left({}^tM\right)$.

On considère les deux propriétés suivantes pour des matrices :

Propriété $\mathcal{O}$ **:** on dit qu'une matrice $M=(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{O}$ si ses colonnes C_1, …, C_n sont deux à deux orthogonales c'est à dire :

$$C_i^\top C_j = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}m_{k,j} = 0 \text{ pour tout } i \neq j$$

Propriété $\mathcal{I}$ **:** on dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{I}$ si $M^\top M = \mathrm{I}_n$ où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

Partie A | Étude d'un premier exemple

On considère la matrice $G=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

Q10. La matrice G vérifie-t-elle la propriété $\mathcal{O}$? la propriété $\mathcal{I}$?

Q 10| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que $C^1 \top C_2=0$, $C_1 \top C_3=0$ et $C_2^\top C_3=0$ ce qui assure que G vérifie $\mathcal{O}$.
Par contre $G^\top G=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et donc G ne vérifie par $\mathcal{I}$.

Q11. Déterminer le noyau de G.

Q 11| Éléments de réponse

Comme la deuxième colonne de G est nulle, son rang est au plus égal à 2. Comme C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\mathrm{rg}(G) = 2$ et donc que par le théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker}(G)) = 1$. Or on remarque que $G\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ce qui assure que $\mathrm{Ker}(G) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Q12. Soit λ un réel non nul.
Montrer que λ est une valeur propre de G si, et seulement si, λ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$.

Q 12| Éléments de réponse

On sait que : $(\lambda \in \mathrm{sp}(G)) \quad\Leftrightarrow\quad (G - \lambda \mathrm{I}_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}))$

On a clairement par échelonnement que : $G - \lambda \mathrm{I}_3 \sim \ldots \sim \begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 0\\0 & 1-\lambda & 0\\0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$

En posant $H = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$, sous l'hypothèse $\lambda \neq 0$ l'inversibilité ou non de $G - \lambda \mathrm{I}_3$ sera assurée par l'inversibilité ou non de la matrice $H - \lambda \mathrm{I}_2$, cette dernière étant donnée par l'appartenance ou non de λ au spectre de H.

Q13. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$?

Q 13| Éléments de réponse

En notant $H = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$, puisque $H \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, les valeurs propres de H sont les solutions de l'équation $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(H)\lambda + \det(H) = 0$ ce qui revient à résoudre l'équation $\lambda^2 - 2 = 0$ et ainsi il vient que $\mathrm{sp}(H) = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

Q14. La matrice G est-elle diagonalisable ?

Q 14| Éléments de réponse

Par ce qui précède, il vient que $\mathrm{sp}(G) = \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$, donc G est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc par théorème, G est diagonalisable.

Partie B | À propos de la propriété $\mathcal{O}$

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note C_1, …, C_n ses colonnes.

Q15. Montrer que le coefficient d'indices i et j noté $\left(M^\top M\right)_{i,j}$ de $M^\top M$ est $\left(M^\top M\right)_{i,j} = C_i^\top C_j$.

Q 15| Éléments de réponse

D'après la formule du produit de deux matrices, on a :

$$\begin{aligned}\left(M^\top M\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \left(M^\top\right)_{i,k} M_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{n} M_{k,i} M_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{n} (C-i) - K\left(C_j\right)_k\\ &= C_i^\top C_j\end{aligned}$$

Pour toute la suite de cette partie, on suppose que la matrice M vérifie la propriété $\mathcal{O}$.

Q16. Montrer que la matrice $M^\top M$ est diagonale.

Q 16| Éléments de réponse

Les coefficients de $M^\top M$ sont obtenus en effectuant les produits $C_i^\top C_j$ qui sont nuls lorsque $i \neq j$, ce qui assure le caractère diagonale de la matrice $M^\top M$.

Q17. Montrer que les coefficients diagonaux de $M^\top M$ sont positifs ou nuls.

Q 17| Éléments de réponse

Les coefficients diagonaux de $M^\top M$ sont exactement $C_i^\top C_i$ qui vaut explicitement la somme des carrés des coefficients de la matrice colonne C_i, et donc sont positifs ou nul.

Q18. Si $\left(M^\top M\right)_{j,j}$ est nul, que peut-on en déduire sur C_j ?

Q 18| Éléments de réponse

En reprenant la question précédente, une somme de termes positifs est nulle si, et seulement, chaque terme est nul. Comme ces derniers sont les carrés des coefficients de la matrice colonne C_i, tous les coefficients de la matrice colonne C_j sont nuls. Ainsi C_j est nul.

Q19. Montrer que M est inversible si, et seulement si, aucune de ses colonnes n'est entièrement remplie de 0.

Q 19| Éléments de réponse

Une matrice inversible ne pouvant contenir de colonne nulle (car sinon son rang n'est pas égal à sa taille), il vient donc que si M est inversible, alors aucune de ses colonnes n'est entièrement nulle.
Réciproquement, le fait que M vérifie $\mathcal{O}$, revient à dire que la famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les vecteurs sont représentés par les colonnes C_1, …, C_n, est une famille orthogonale, qui par ailleurs ne contient par le vecteur nul, et donc par théorème, est libre. Comme il s'agit d'une famille libre de n vecteurs d'un espace de dimension n, elle en forme un base. Par suite, sa représentation matricielle dans une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ est inversible, et en particulier M l'est.

Partie C | À propos de la propriété $\mathcal{I}$

Dans cette partie, on suppose que la matrice M vérifie la propriété $\mathcal{I}$.

Q20. Montrer que M est inversible.

Q 20| Éléments de réponse

Puisque $M^\top M = \mathrm{I}_n$, il vient que M est inversible à gauche donc inversible, et en particulier, son inverse est $M^\top$.

Q21. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\mathcal{I}$. Montrer que $P^\top MP$ vérifie la propriété $\mathcal{I}$.

Q 21| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}(P\top MP)^\top P^\top MP &= P^\top M^\top \underbrace{PP^\top}_{=\mathrm{I}_3} MP \\ &= P^\top \underbrace{M^\top M}_{=\mathrm{I}_3} P \\ &= P^\top P \\ &= \mathrm{I}_3\end{aligned}$$

Partie D | Étude d'un deuxième exemple

On suppose désormais que $n = 3$.

On note $\langle u \,|v\rangle$ le produit scalaire de u avec v et on rappelle que la norme est donnée par $\|u\| = \sqrt{\langle u \,|u\rangle}$.
On fixe un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $x_3 \neq 0$, ainsi qu'un vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ de même norme que x et non colinéaire à x.
On définit par ailleurs $z \in \mathbb{R}^3$ par : $\quad z = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$
On introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q22. Montrer que $\|z\| = 0$ si, et seulement si, $A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Q 22| Éléments de réponse

On commence par remarquer que $AY = Z$ en passant aux représentations matricielles des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Ainsi, si $\|z\| = 0$ alors $z = 0$, il est immédiat que $AY = 0$. Réciproquement si $AY = 0$, alors $Z = 0$ et donc que $\|z\| = 0$.

Q23. Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Q 23| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Q24. En déduire que la dimension du noyau de l'application linéaire représentée par A est inférieure ou égale à 1.

Q 24| Éléments de réponse

Les deux matrices colonnes $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont clairement non colinéaires puisque $x_3 \neq 0$, et représentent deux éléments non nuls et non colinéaires de l'image de l'application linéaire représentée par la matrice A, ce qui assure que le rang de cette dernière vaut au moins 2, et donc par le théorème du rang, que son noyau est de dimension au plus 1.

Q25. Montrer que $z \neq (0, 0, 0)$.

Q 25| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que $AX = 0$, donc X est dans le noyau de A et par ce qui précède $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\,(X)$. Comme Y n'est pas colinéaire à X, il vient que $AY \neq 0$ car sinon il serait dans le noyau de A et donc colinéaire à x, et donc il vient que $z\ \not0$.

Q26. Montrer que $\langle x \,|z\rangle = 0$ et $\langle y \,|z\rangle = 0$, puis que $\langle x + y \,|z\rangle = 0$ et $\langle x - y \,|z\rangle = 0$.

Q 26| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} \langle x \,|z\rangle & = & x_1\,(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2\,(x_3y_1 - x_1y_3) \\ & = & 0 \end{array}$ et sur le même principe que $\langle y \,|z\rangle = 0$.
Par contre, on obtient par bilinéarité du produit scalaire que : $\begin{array}{rcl} \langle x + y \,|z\rangle & = & \langle x \,|z\rangle + \langle y \,|z\rangle \\ & = & 0 + 0 \\ & = & 0 \end{array}$

et sur le même principe que $\langle x - y \,|z \rangle = 0$.

Q27. Montrer que la famille $(x+y, x-y, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q 27| Éléments de réponse

On remarque que $\langle x + y \,|x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$.
La question précdente assure alors que cette famille est une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne contenant pas le vecteur nul, donc par théorème elle est libre, et comme il s'agit d'une famille libre de 3 vecteurs d'un espace de dimension 3, elle est libre.

Q28. Pour toute la suite, on définit l'application linéaire $\ell : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par :

$$\ell\,(x+y) = x+y,\ \ell\,(x-y) = y-x,\ \text{ et } \ell\,(z) = z$$

Quelle est la matrice de ℓ dans la base $\left(\dfrac{x+y}{\|x+y\|}, \dfrac{x-y}{\|x-y\|}, \dfrac{z}{\|z\|}\right)$? On notera L cette matrice par la suite.

Q 28| Éléments de réponse

Par construction et linéarité de ℓ, il vient que $\ell\left(\dfrac{x+y}{\|x+y\|}\right) = \dfrac{x+y}{\|x+y\|}$, $\ell\left(\dfrac{x-y}{\|x-y\|}\right) = -\dfrac{x-y}{\|x-y\|}$ et $\ell\left(\dfrac{z}{\|z\|}\right) = \dfrac{z}{\|z\|}$.
Par suite, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Q29. On note $P = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1+y_1}{\|x+y\|} & \dfrac{x_1-y_1}{\|x-y\|} & \dfrac{z_1}{\|z\|} \\ \dfrac{x_2+y_2}{\|x+y\|} & \dfrac{x_2-y_2}{\|x-y\|} & \dfrac{z_2}{\|z\|} \\ \dfrac{x_3+y_3}{\|x+y\|} & \dfrac{x_3-y_3}{\|x-y\|} & \dfrac{z_3}{\|z\|} \end{pmatrix}$.
Exprimer la matrice de ℓ dans la base canonique comme un produit de matrices.

Q 29| Éléments de réponse

P est clairement la matrice de passage de la base canonique à la base $\left(\dfrac{x+y}{\|x+y\|}, \dfrac{x-y}{\|x-y\|}, \dfrac{z}{\|z\|}\right)$, ce qui donne en notant L' la matrice de ℓ dans la base canonique par les formules de changement de base que $A = PLP^{-1}$

Q30. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété $\mathcal{I}$ et telle que $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Q 30| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} L'X &= L'\left(\frac{X+Y-X-Y}{2}\right) \\ &= Y \end{aligned}$$
et sur le même principe que $L'Y = X$.
Par ailleurs P vérifie $\mathcal{I}$ ainsi que $P^\top$, donc $P^{-1} = P^\top$. Finalement, il vient que $L' = PLP^\top$ avec notamment que L' vérifie $\mathcal{I}$ puisque c'est le cas pour L. Ainsi $M = L'$ convient.

Problème n° 3 | Quelques éléments d'analyse

Partie A | Étude d'une première fonction

On considère la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} \end{array} \right.$.

Q31. Justifier que la fonction f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q 31| Éléments de réponse

L'expression $f(x)$ n'a de de sens que si $\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ est non nul.
Puisque : $\forall t \in \mathbb{R},\, \mathrm{e}^{t} > 0$
il vient que l'expression $\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ est la somme de deux réels strictement positifs, donc ne peut pas s'annuler, ce qui assure que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Q32. Montrer que f est paire.

Q 32| Éléments de réponse

Il est immédiat que le domaine de définie de f est symétrique par rapport à 0.

Par ailleurs : $\forall x \in \mathbb{R},\, f(-x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-(-x)}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} = f(x)$

et donc f est paire.

Q33. Montrer que f et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f'.

Q 33| Éléments de réponse

Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont clairement dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par somme, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a vu que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc par passage à l'inverse, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par suite, il vient que : $\forall x \in \mathbb{R},\, f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})^{2}}$.

Q34. Montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$.

Q 34| Éléments de réponse

Les variations de f sur $]-\infty;0[$ sont données par le signe de $f'(x)$ sur ce même intervalle.
Le signe de $f'(x)$ est clairement donné par celui de l'expression $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}$.

On a alors : $(f'(x) > 0) \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x} < 0)$
$\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2x}-1 < 0\right)$ car $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2x} < 1\right)$

La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$ étant croissante sur $\mathbb{R}$, elle l'est sur $]-\infty;0]$ et donc : $t \in\,]-\infty;0[\,,\ \mathrm{e}^{t} < \underbrace{\mathrm{e}^{0}}_{=1}$

Par suite, il vient que : $\forall x \in\,]-\infty;0[\,,\ f'(x) < 0$.
Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

Q35. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Q 35| Éléments de réponse

Il est clair que $\mathrm{e}^{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par somme que $\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc par passage à l'inverse que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q36. Soit un réel $M>0$. En effectuant le changement de variables $u=\mathrm{e}^{x}$, montrer que :

$$\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}^M} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Q 36| Éléments de réponse

Le changement de variable $u=\mathrm{e}^{x}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;M]$ conduit à écrire les relations :

$$\begin{cases} (x=0) & \Leftrightarrow \quad (u=1) \\ (x=M) & \Leftrightarrow \quad \left(u=\mathrm{e}^{M}\right) \\ (u=\mathrm{e}^{x}) & \Leftrightarrow \quad (x=\ln(u)) \\ \mathrm{d}u=\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x & \text{et} \quad \mathrm{d}x=\dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u \end{cases}$$

Il vient donc que :

$$\begin{aligned} \int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^M \frac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\mathrm{e}^M} \frac{1}{u+\frac{1}{u}} \times \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\mathrm{e}^M} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Q37. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Q 37| Éléments de réponse

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en ses deux bornes.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$: Soit $M>0$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}^M} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= [\arctan(u)]_1^{\mathrm{e}^M} \\ &= \arctan\left(\mathrm{e}^{M}\right) - \arctan(1) \\ &= \arctan\left(\mathrm{e}^{M}\right) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{e}^{M} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $\arctan(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, par composition, il vient que $\arctan\left(\mathrm{e}^{M}\right) \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

Par suite, il vient que $\displaystyle\int_0^M f(x)\,\mathrm{d}x \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$ ce qui assure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$: soit $M<0$. Puisque f est paire, il vient que $\displaystyle\int_M^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{-M} f(x)\,\mathrm{d}x$ et on revient sur le cas précédent où l'on pourra obtenir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Conclusion : les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ étant convergente, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}_{=\frac{\pi}{2}}$.

Q38. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-1 \leq f'(x) \leq 1$.

Q 38| Éléments de réponse

On commencera par remarquer que la fonction f' est impaire, et donc qu'il suffit de montrer que : $\forall x \geq 0,\ -1 \leq f'(x) \leq 1$
Soit alors $x \geq 0$.
Il est clair que : $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{2x} \leq (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2$
ce qui assure que : $f'(x) \leq 1$
De même, on a que $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{x} \leq \mathrm{e}^{2x} \leq (\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^2$
ce qui assure que : $-f'(x) \leq 1$ et donc que $f'(x) \geq -1$.
Finalement : $-1 \leq f'(x) \leq 1$.

Q39. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |x-y|$

Q 39| Éléments de réponse

La fonction f étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq 1$
d'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq 1 \times |x-y|$
c'est à dire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |x-y|$

Partie B | Étude d'une deuxième fonction

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$ converge.

Q40. Justifier que g admet une limite en $-\infty$ et une limite en $+\infty$.

Q 40| Éléments de réponse

La fonction g étant positive sur $\mathbb{R}$, elle est donc minorée sur $]0;+\infty[$. Comme elle est décroissante sur $]0;+\infty[$, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $+\infty$.
Sur le même principe, la fonction g étant positive, elle est donc minorée sur $]-\infty;0[$. Comme elle est croissante sur $]0;+\infty[$, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en $-\infty$.

Q41. Montrer que ces deux limites sont toutes les deux non nulles.

Q 41| Éléments de réponse

Puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$ converge, on a nécessairement que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$ converge. Or si la limite de g en $+\infty$ n'est pas nulle, pour x assez grand, comme g est positive, g sera minorée par un réel $m > 0$, ce qui compte-tenu du théorème de comparaison pour les intégrales impropres de fonctions positives, empêchera la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(y)\,\mathrm{d}y$ puisque trivialement $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} m\,\mathrm{d}y$ est divergente. Par suite la limite de g en $+\infty$ est nulle.
On effectue un raisonnement analogue pour montrer que $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

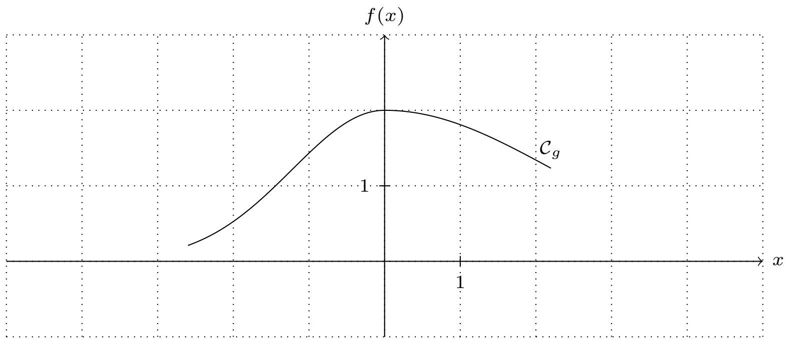
Q42. Montrer qu'il existe exactement deux réels x_- et x_+ tels que $g(x_-) = g(x_+) = \dfrac{g(0)}{2}$.

Q 42| Éléments de réponse

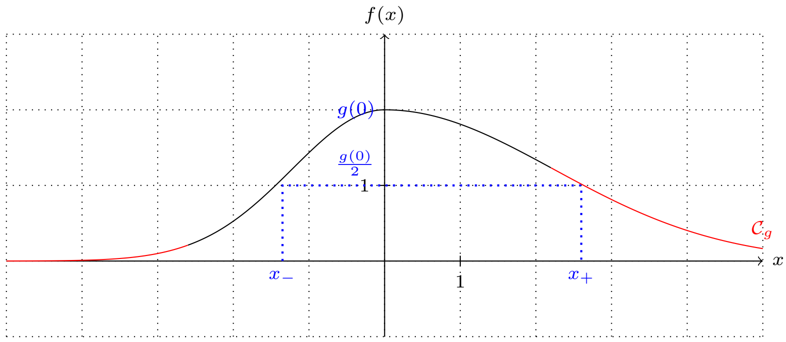
La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Puisque $\dfrac{g(0)}{2} \in]0; g(0)[= g(]0;+\infty[)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, il existe un unique réel $x_+ \in]0;+\infty[$ tel que $g(x_+) = \dfrac{g(0)}{2}$.
On effectue un raisonnement analogue pour justifier l'existence et l'unicité de x_-, ce qui assure le résultat attendu.

Q43. On a tracé ci-dessous, en repère orthonormé, une partie du graphe d'une fonction g qui vérifie les hypothèses.

Recopier ce graphe et le compléter en faisant apparaître toutes les informations obtenues dans cette partie. On placera en particulier x_- et x_+.



Q 43| Éléments de réponse



Q44. Pour la suite de l'énoncé, on suppose de plus que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(y)| \leq |x - y|$$

Pour $A > 0$ et $L > 0$, on définit les fonctions $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$h(t) = g(t) + \sin(At) \text{ et } F(t) = \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} h(s)\,\mathrm{d}s \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Montrer que : $\quad F(t) - g(t) = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{t-L}^{t+L} (g(s) - g(t))\,\mathrm{d}s + \dfrac{\cos(A(t-L)) - \cos(A(t+L))}{2LA}.$

Q 44| Éléments de réponse

Un caldul direct donne que :

$$
\begin{aligned}
F(t)-g(t) &= \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} h(s)\,\mathrm{d}s - g(t)\\
&= \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} (g(s)-\sin(As))\ \mathrm{d}s - g(t)\\
&= \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} (g(s)+\sin(As))\ \mathrm{d}s - g(t)\times \underbrace{\frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} 1\,\mathrm{d}s}_{=\frac{1}{2L}\times 2L=1}\\
&= \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} (g(s)+\sin(As))\ \mathrm{d}s - \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} g(t)\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} (g(s)-g(t)+\sin(As))\ \mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} (g(s)-g(t))\ \mathrm{d}s + \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} \sin(As)\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} (g(s)-g(t))\ \mathrm{d}s + \frac{1}{2L}\left[-\frac{\cos(As)}{A}\right]_{t-L}^{t+L}\\
&= \frac{1}{2L}\int_{t-L} (g(s)-g(t))\ \mathrm{d}s + \frac{\cos(A(t-L))-\cos(A(t+L))}{2LA}
\end{aligned}
$$

Q45. Montrer que $\displaystyle\int_{t-L}^{t+L} |s-t|\ \mathrm{d}s = L^2$.

Q 45| Éléments de réponse

En distinguant les cas, un calcul direct donne que :

$$
\begin{aligned}
\int_{t-L}^{t+L} |s-t|\ \mathrm{d}s &= \int_{t-L}^{t} |s-t|\ \mathrm{d}s + \int_{t}^{t+L} |s-t|\ \mathrm{d}s\\
&= \int_{t-L}^{t} (t-s)\,dds + \int_{t}^{t+L} (s-t)\ \mathrm{d}s\\
&= \left[ts-\frac{s^2}{2}\right]_{t-L}^{t} + \left[\frac{s^2}{2}-ts\right]_{t}^{t+L}\\
&= tL-\frac{t^2}{2}+\frac{(t-L)^2}{2}+\frac{(t+L)^2}{2}-\frac{t^2}{2}-tL\\
&= \frac{-t^2+t^2-2tL+L^2+t^2+2tL+L^2-t^2}{2}\\
&= L^2
\end{aligned}
$$

Q46. En déduire que $|F(t)-g(t)| \le \dfrac{L}{2}+\dfrac{1}{LA}$.

Q 46| Éléments de réponse

Une majoration directe à l'aide de l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned}
|F(t)-g(t)| &= \left|\frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L}(g(s)-g(t))\,\mathrm{d}s+\frac{\cos(A(t-L))-\cos(A(t+L))}{2LA}\right| \\
&\leq \frac{1}{2L}\left|\int_{t-L}^{t+L}(g(s)-g(t))\,\mathrm{d}s\right|+\left|\frac{\cos(A(t-L))-\cos(A(t+L))}{2LA}\right| \\
&\leq \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L}|g(s)-g(t)|\,\mathrm{d}s+\frac{|\cos(A(t-L))-\cos(A(t+L))|}{2LA} \\
&\leq \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L}|s-t|\,\mathrm{d}s+\frac{2}{2LA} \\
&\leq \frac{L^2}{2L}+\frac{1}{LA} \\
&= \frac{L}{2}+\frac{1}{LA}
\end{aligned}$$

Q47. Comment choisir $L>0$ pour que $\dfrac{L}{2}+\dfrac{1}{LA}$ soit le plus petit possible, A étant fixé ?

Q 47| Éléments de réponse

L'étude des variations de la fonction $L\longmapsto \dfrac{L}{2}+\dfrac{1}{LA}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ donne que :

L	0		$\sqrt{\dfrac{2}{A}}$		$+\infty$
Variations de $L\longmapsto \dfrac{L}{2}+\dfrac{1}{LA}$		$\searrow$		$\nearrow$	

et donc que cette dernière présente en un minimum sur $]0;+\infty[$ en $L=\sqrt{\dfrac{2}{A}}$

Q48. On suppose pour toute la fin de cette partie que $A=2\pi$ et que $L=1$.
Exprimer F en fonction de g.

Q 48| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}(g(s)+\sin(2\pi s))\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}g(s)\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}\sin(2\pi s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}g(s)\,\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2\pi s)}{2\pi}\right]_{t-1}^{t+1} \\
&= \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}g(s)\,\mathrm{d}s-\frac{1}{4\pi}\left(\cos(2\pi t+2\pi)-\cos(2\pi t-2\pi)\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}g(s)\,\mathrm{d}s-\frac{1}{4\pi}\left(\cos(2\pi t)-\cos(2\pi t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1}g(s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Q49. Recopier le tracé complet de la fonction g fait précédemment et dessiner également le graphe de la fonction h.

Q 49| Éléments de réponse