Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Réaliser l'entête de votre devoir en respectant les éléments suivants : inscrire en rouge et en majuscules en haut à gauche de la première copie double, vos nom et prénom tels qu'ils figurent sur votre dossier d'inscription en commençant au plus à 1 cm du bord gauche de la feuille et au plus à 3 cm du bord supérieur de la feuille, puis au même niveau sur la partie droite de la page, inscrire en anglais la date du devoir ; en sautant une ligne, sous votre nom, inscrire « CPGE-BL 1^{e}année » ; en laissant un espacement d'environ 2 cm par rapport à la dernière ligne écrite, inscrire en toutes lettres, et en respectant la casse, « Devoir surveillé n° 15 | Concours Blanc n° 1 » au centre de la ligne ; pour finir, laisser un espacement d'environ 2 cm par rapport à cette dernière ligne, tirer un trait horizontal sur la totalité de la largeur de la page, sous ce trait répondre, en justifiant votre réponse à la devinette suivante : « Le père Noël part pour sa tournée avec 6 rennes. Chaque renne transporte 3 lutins sur son dos et 2 lucioles sur ses cornes. Chaque lutin porte 3 sacs qui contiennent chacun 10 cadeaux. Combien d'êtres vivants partent pour la tournée de cadeaux ? »

Q 1| Éléments de réponse

Pour la devinette, il y a 37 êtres vivants au total : 1 Père Noël, 6 rennes, 18 lutins et 12 lucioles.

Problème n° 1 | Étude de deux suites réelles

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

Partie A | Recherche de l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q2. Vérifier que $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{3}{4}$, puis calculer u_2 et v_2.

Q 2| Éléments de réponse

Par définition des deux suites, on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}(u_0 + v_0) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{1}{2} \\ v_1 &= \frac{1}{2}(u_1 + v_0) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Sur le même principe, on a :
$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2}(u_1+v_1) \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{5}{8} \\ v_2 &= \frac{1}{2}(u_2+v_1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{11}{8} \end{aligned}$$

Q3. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n = v_n - u_n$.
Établir que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2}w_n$

Q 3| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{2}(u_n+v_n)-u_n \\ &= \frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}v_n-u_n \\ &= -\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}v_n \\ &= \frac{1}{2}(v_n-u_n) \\ &= \frac{1}{2}w_n \end{aligned}$$

Q4. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Q 4| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} \forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1} &= v_{n+1}-u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}(u_{n+1}+v_n)-\frac{1}{2}(u_n+v_n) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(u_n+v_n)+v_n\right)-\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}v_n \\ &= \frac{1}{4}(u_n+v_n)+\frac{1}{2}v_n-\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2}v_n \\ &= \frac{1}{4}u_n+\frac{1}{4}v_n-\frac{1}{2}u_n \\ &= -\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{4}v_n \\ &= \frac{1}{4}(v_n-u_n) \\ &= \frac{1}{4}w_n \end{aligned}$$

ce qui assure que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0$ c'est à dire $w_0 = 1$.

Q5. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

Q 5| Éléments de réponse

Puisque $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme 1, on a d'après le cours que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} w_k = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}$$

ce qui amène à : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

Q6. Déduire de ce qui précède une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 6| Éléments de réponse

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = \frac{1}{2} w_k$

Par suite, par sommation de ces égalités, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} w_k$

ce qui donne donc par téléscopage que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_0 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

et donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

Q7. Vérifier que l'expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à la question précédente, est encore valable pour $n = 0$.

Q 7| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^0\right) = \frac{3}{8}\underbrace{(1-1)}_{=0}$ ce qui donne bien $u_0 = \frac{3}{8}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^0\right)$ et ainsi, la formule précédemment établie est vraie pour $n = 0$.

Partie B | Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q8. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Q 8| Éléments de réponse

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

Comme $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, on a que $\left(\frac{1}{4}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure par somme et produit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$ c'est à dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{2}{3}$.

Q9. Déterminer une expression du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Q 9| Éléments de réponse

Par construction de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a directement que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + w_n$

ce qui donne que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

ou encore que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Q10. Déduire de ce qui précède la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 10| Éléments de réponse

Comme $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, on a que $\left(\frac{1}{4}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure par somme et produit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$ c'est à dire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{2}{3}$.

Partie C | Étude d'une suite définie par une somme

Dans toute cette partie α désigne un réel quelconque.
On considère alors les suites $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n) \ \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$$

Q11. Déterminer l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q 11| Éléments de réponse

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

que l'on peut écrire aussi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Par conséquent, on a alors :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k\\ &= \frac{2}{3}(n+1) - \frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\\ &= \frac{2}{3}(n+1) - \frac{8}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\end{aligned}$$

Q12. Déduire de ce qui précède l'expression de S_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q 12| Éléments de réponse

Par définition de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{9}{8}(\alpha - u_n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{9}{8}\alpha - \frac{9}{8}u_n\right)\\ &= \frac{9}{8}\alpha\times(n+1) - \frac{9}{8}\sum_{k=0}^{n}u_n\\ &= \frac{9}{8}\alpha\times(n+1) - \frac{9}{8}\left(\frac{2}{3}(n+1) - \frac{8}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right)\\ &= \frac{9}{8}\alpha\times(n+1) - \frac{9}{8}\times\frac{2}{3}(n+1) + 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\\ &= \frac{9}{8}(n+1)\left(\alpha - \frac{2}{3}\right) + 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Q13. Justifier que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si, et seulement si, $\alpha = \frac{2}{3}$.

Q 13| Éléments de réponse

Puisque $\left|\dfrac{1}{4}\right| < 1$, par théorème, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par somme que $1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de la convergence ou non du terme $\dfrac{9}{8}(n+1)\left(\alpha - \dfrac{2}{3}\right)$:

Si $\alpha = \dfrac{2}{3}$ **:** on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$

et par conséquent $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ce qui signifie que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Si $\alpha \neq \dfrac{2}{3}$ **:** on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{9}{8}(n+1)\underbrace{\left(\alpha - \dfrac{2}{3}\right)}_{\neq 0} + 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$

Or dans ce cas que $\dfrac{9}{8}(n+1)\left(\alpha - \dfrac{2}{3}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ selon le signe de $\alpha - \dfrac{2}{3}$, et par somme il vient que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et donc que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Q14. Dans le cas où $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, déterminer alors la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 14| Éléments de réponse

D'après la question précédente, la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est possible que si $\alpha = \dfrac{2}{3}$ et que dans ce cas $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Problème n° 2 | Suites et puissances de matrices

Dans tout ce problème, M désigne la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ suivante : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies à l'aide des relations ci-dessous :

$$a_0 = 0,\ b_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 2b_n \end{cases}$$

Partie A | Recherche d'une expression de M^n

Q15. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$.

Q 15| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $M^n = \begin{pmatrix} a_b & b_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ »

Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Initialisation : On a $M^0 = \mathrm{I}_2$ et donc que $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs il est immédiat que $\begin{pmatrix} b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a bien $M^0 = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix}$, ce qui assure que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Il est clair que $M^{n+1} = M^n \times M$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, il vient que :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b_n & 2a_n + b_n \\ 0 & 2b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{n+1} & a_{n+1} \\ 0 & a_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q16. Déterminer une expression de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q 16| Éléments de réponse

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = 2b_n$
on en déduit que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $b_0 = 1$, ce qui assure que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 2^n$

Q17. Démontrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.

Q 17| Éléments de réponse

Par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + b_n$
ce qui donne directement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.

Q18. On désigne alors par $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$.
Démontrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

Q 18| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2a_n + 2^n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \\ &= c_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$
ce qui assure que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = 0$.

Q19. Déduire de ce qui précède une expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q 19| Éléments de réponse

Puisque $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = 0$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{1}{2}n$

Q20. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n2^{n-1}$.

Q 20| Éléments de réponse

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$
il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n c_n$
ce qui donne que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = n2^{n-1}$

Q21. Expliciter alors complètement M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q 21| Éléments de réponse

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\, M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & a_n \end{pmatrix}$

on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\, M^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Partie B | Application à un calcul de somme

Q22. Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = a_{n+1} - a_n - 2^n$

Q 22| Éléments de réponse

On a vu précédemment que : $\forall n \in \mathbb{N},\, a_{n+1} = 2a_n + 2^n$
autrement dit, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\, a_{n+1} = a_n + a_n + 2^n$
et donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = a_{n+1} - a_n - 2^n$

Q23. Sans justification donner l'expression de $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q 23| Éléments de réponse

Puisque $2 \neq 1$, on a : $\sum_{k=0}^{n} 2^k = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}$

ce qui donne que : $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

Q24. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N},\, \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

Q 24| Éléments de réponse

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\, a_n = a_{n+1} - a_n - 2^n$

par sommation de ces égalités, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\, \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \left(a_{k+1} - a_k - 2^k\right)$

Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\, \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)}_{=a_{n+1}-a_0} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 2^k}_{=2^{n+1}-1}$

ce qui amène donc à : $\forall n \in \mathbb{N},\, \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n+1)2^n - 2^{n+1} + 1$

et finalement : $\forall n \in \mathbb{N},$
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} &= (n+1)2^n - 2\times 2^n + 1 \\ &= 2^n(n+1-2)+1 \\ &= 2^n(n-1)+1 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

Partie C | Application au calcul des puissances d'une autre matrice

' Dans tout ce qui suit, on considère les deux matrices A et P de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ données par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q25. Justifier que P est inversible, puis déterminer P^{-1}.

Q 25| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}\det(P) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 - (-1) \times 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

ce qui assure que $\det(P) \neq 0$ et par théorème que P est inversible, et d'inverse : $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q26. Démontrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P^{-1}A^nP$.

Q 26| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $M^n = P^{-1}A^nP$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a que $M^0 = \mathrm{I}_2$ et que : $$\begin{aligned}P^{-1}A^0P &= P^{-1}\mathrm{I}_2P \\ &= P^{-1}P \\ &= \mathrm{I}_2\end{aligned}$$

et donc on a bien que $M^0 = P^{-1}A^0P$, ce qui est $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$. Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Il est immédiat que $M^{n+1} = M^n \times M$.
Par hypothèse de récurrence, il vient que : $M^{n+1} = P^{-1}A^nPM$.
Un calcul direct donne que : $P^{-1}AP = M$, ce qui assure alors que : $$\begin{aligned}M^{n+1} &= P^{-1}A^nPP^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^n\mathrm{I}_2AP \\ &= P^{-1}A^nAP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P\end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q27. Déterminer alors une expression de A^n en fonction de P, P^{-1} et M^n.

Q 27| Éléments de réponse

Puisque $M^n = P^{-1}A^nP$, en multipliant à gauche par P, il vient que $PM^n = A^nP$ et en multipliant à droit par P^{-1}, on a donc que $A^n = PM^nP^{-1}$

Q28. Déduire de ce qui précède une expression de A^n en fonction de n.

Q 28| Éléments de réponse

Un calcul direct donne alors que : $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}\left(2 + \dfrac{n}{2}\right) & n2^{n-2} \\ -n2^{n-2} & 2^{,-1}\left(2 - \dfrac{n}{2}\right) \end{pmatrix}$.

Problème n° 3 | Étude d'une suite

Dans tout ce problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} u_n \end{cases}$$

On se propose dans ce problème de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
On rappelle que l'on a : $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[,\quad \ln(1+x) \leq x$.

Partie A | Préliminaire technique

On définit pour tout ce qui suit, la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right).$

Q29. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$

Q 29| Éléments de réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a trivialement que $\frac{1}{2^n} \in]-1;+\infty[$, donc on a d'après l'inégalité proposée que $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

Q30. Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 30| Éléments de réponse

En remarquant que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et que $\frac{1}{2} \neq 1$, on a directement que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$.

Finalement après simplification, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}.$

Q31. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n \leq 1.$

Q 31| Éléments de réponse

Puisque : $\forall k \in \mathbb{N},\ \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$

par sommation de ces inégalités, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}_{=s_n} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}_{=1-\frac{1}{2^n}}$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1-\frac{1}{2^n} \leq 1$, il vient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \leq 1$.

Partie B | Étude de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q32. Montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$

Q 32| Éléments de réponse

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$:« $u_n > 0$ ». Montrons par récurrence double sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
En effet, on a bien $u_0 = 1$ et $1 > 0$, puis $u_1 = 2$ et $2 > 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(\backslash+\infty)$, c'est à dire que $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$. Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+2)$ à savoir $u_{n+2} > 0$.
Par définition $u_{n+2} = u_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n$. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, et on a $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$, donc par somme de nombres strictement positifs, il vient que $u_{n+2} > 0$, ce qui est $\mathcal{P}(n+2)$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie aux rangs 0 et 1, et étant héréditaire, par le principe de récurrence double,

$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Q33. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $u_{n+2} - u_{n+1}$, et en déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q 33| Éléments de réponse

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n.$

Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$.
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Q34. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u_n.$

Q 34| Éléments de réponse

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n \\ &\leq u_{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_{n+1} \\ &\leq u_{n+1}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$

Q35. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_1 \times \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right).$

Q 35| Éléments de réponse

De la question précédente, il vient :
$$\begin{cases} u_{n+1} \leq u_n \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ u_n \leq u_{n-1} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ \vdots \\ u_2 \leq u_1 \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1\right) \end{cases}$$

et ainsi :
$$u_{n+1} \leq u_1 \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) \times \ldots \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1\right)$$

ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_1 \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right).$

Q36. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un majorant de sa limite.

Q 36| Éléments de réponse

De la question précédente, la croissance de la fonction logarithme sur $]0;+\infty[$ permet d'obtenir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_n) \leq \ln(u_1) + \underbrace{\ln\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\right)}_{=s_{n-1}}$$

et comme la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est majorée, il en alors de même pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec notamment la majoration suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq \underbrace{u_1}_{=2} + 1$

De la majoration sur $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\right) \leq 1$ et en composant par la fonction exponentielle : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \mathrm{e}^1$.

D'après la question précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_1 \times \mathrm{e}$ ce qui permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite ℓ qui est ainsi majorée par $u_1 \times \mathrm{e} = 2\mathrm{e}$.

Problème n° 4 | Familles libres de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que l'on suppose être une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère alors la famille de vecteurs $\mathcal{G}_\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ définie par les relations :

$$\begin{cases} v_1 = (\alpha+1)\, u_1 + u_2 + u_3 \\ v_2 = u_1 + (\alpha+1)\, u_2 + u_3 \\ v_3 = u_1 + u_2 + (\alpha+1)\, u_3 \end{cases}$$

On se propose d'étudier le caractère libre de la famille $\mathcal{G}_\alpha$ en fonction de α.

Partie A | Étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $\alpha = -3$ et que $\mathcal{F}$ est donnée par : $\begin{cases} u_1 = (1,1,1) \\ u_2 = (1,-1,1) \\ u_3 = (1,0,-1) \end{cases}$.

Q37. Déterminer les vecteurs de la famille $\mathcal{G}_{-3}$.

Q 37| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $\begin{cases} v_1 = (0,-3,-2) \\ v_2 = (0,3,-2) \\ v_3 = (0,0,4) \end{cases}$

Q38. Étudier la liberté de la famille $\mathcal{G}_{-3}$.

Q 38| Éléments de réponse

Il est immédiat que $v_1 + v_2 + v_3 = (0,0,0)$, donc on dispose d'une combinaison linéaire nulle non triviale des vecteurs de la famille $\mathcal{G}_{-3}$, donc cette dernière est liée.

Partie B | Étude d'un second cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $\alpha = -1$.

Q39. On suppose que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ est tel que : $(\star) : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \overrightarrow{0}$.

Montrer alors que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système de représentation matricielle : $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Q 39| Éléments de réponse

On a donc : $\begin{cases} v_1 = u_2 + u_3 \\ v_2 = u_1 + u_3 \\ v_3 = u_1 + u_2 \end{cases}$

et par suite $(\star)$ devient : $\lambda_1 (u_2 + u_3) + \lambda_2 (u_1 + u_3) + \lambda_3 (u_1 + u_3) = \overrightarrow{0}$.

ou encore que : $(\lambda_2 + \lambda_3)\, u_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)\, u_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\, u_3 = \overrightarrow{0}$.

Il s'agit donc d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ qui est une famille libre, donc tous les coefficients de cette combinaison sont nulles, ce qui conduit à : $\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$

ce qui signifie bien que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système de de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Q40. Résoudre le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Q 40| Éléments de réponse

On résout le système par échelonnement en lignes pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

On a donc un système carré de taille 3×3 qui est de rang 3. Par théorème, ce dernier admet un unique solution, et comme il s'agit d'un système homogène, il ne peut s'agir que de la solution triviale $(0, 0, 0)$.

Q41. La famille $\mathcal{G}_{-1}$ est-elle une famille libre ? Si non, expliciter une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

Q 41| Éléments de réponse

Supposons que l'on ait $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $(\star) : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \overrightarrow{0}$.

Les questions précédentes assurent que $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$ et donc que la famille $\mathcal{G}_{-1}$ est libre.

Partie C | Étude du cas général

Q42. Déterminer en fonction de α, le rang de la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$.

Q 42| Éléments de réponse

On recherche le rang par échelonnement en lignes de la matrice A_α.

$$\begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (\alpha+1) L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 - 2\alpha \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha^2 - 3\alpha \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha+3) \end{pmatrix}$$

Par suite :

Si $\alpha 0$: on a alors $A_\alpha \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc A_α est de rang 1.

Si $\alpha = -3$: on a alors $A_\alpha \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ oìl est immédiat de voir que A_α est de rang 2.

Q43. Démontrer que $\mathcal{G}_\alpha$ est libre si, et seulement si, $\alpha^2 (\alpha + 3) \neq 0$.

Q 43| Éléments de réponse

Supposons que l'on ait $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $(\star) : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \overrightarrow{0}$
Compte-tenu de l'expression des vecteurs de $\mathcal{G}_\alpha$, la relation $(\star)$ devient :

$$\lambda_1 \left((\alpha+1) u_1 + u_2 + u_3 \right) + \lambda_2 \left(u_1 + (\alpha+1) u_2 + u_3 \right) + \lambda_3 \left(u_1 + u_2 + (\alpha+1) u_3 \right) = \overrightarrow{0}$$

ce qui devient : $\left((\alpha+1)\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \right) u_1 + \left(\lambda_1 + (\alpha+1)\lambda_2 + \lambda_3 \right) u_2 + \left(\lambda_1 + \lambda_2 + (\alpha+1)\lambda_3 \right) u_3 = \overrightarrow{0}$

Ainsi, on dispose d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

Comme cette dernière est supposée libre, on a donc nécessairement que tous les coefficients de cette relation sont nuls et donc que :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (\alpha+1)\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & (\alpha+1)\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & (\alpha+1)\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

et donc par suite que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système carré homogène de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha+1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha+1 & 0 \end{array} \right)$.

D'après la question précédente, ce système est de rang 3 si, et seulement si, $\alpha^2 (\alpha+3) = 0$, ce qui assure dans ce cas là qu'il possède un uniquement solution puisqu'il s'agit d'un système de Cramer, qui est la solution triviale nulle et donc on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$ ce qui assure que la famille $\mathcal{G}_\alpha$ est libre.