Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Il s'agit du sujet originel posé aux épreuves de la BCE filière B/L pour la session 2023.
Vous remarquerez qu'il s'agit d'un sujet extrêmement long, et pour lequel il apparaît comme utopique de le traiter « correctement » ou du moins « non superficiellement » dans le temps imparti.
Il vous est conseillé de prendre le temps de le lire et de l'analyser afin de repérer les questions qui relèvent par exemple d'une application directe du cours ou mieux d'une simple restitution d'un élément de cours, puis de concentrer vos efforts sur deux ou trois des problèmes qui vous sont proposés.

Problème n° 1 | Étude d'une variable aléatoire à densité

Les variables aléatoires de ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Si Y est une variable aléatoire qui admet une espérance et une variance, on note respectivement $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X)$ son espérance et sa variance.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{|x|}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Partie A | Étude de la fonction f

Q1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Q2. Étudier la parité de f.

Q3. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Q4. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$ en précisant les limites de f aux bornes de $[0;+\infty[$ et la valeur des extrema de f sur cet intervalle.

Q5. Esquisser la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Q6. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Q7. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Partie B | Étude d'une variable aléatoire de densité f

On désigne pour toute la suite du problème par X une variable aléatoire de densité f, et on admet que X possède une espérance.

Q8. Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

Q9. On note F_X la fonction de répartition de X. Montrer que : $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Q10. Résoudre l'équation $F_X(x) = \dfrac{3}{4}$ d'inconnue x. Que représente la solution trouvée pour la variable aléatoire X ?

Partie C | Étude d'une autre variable aléatoire

On pose $T = |X|$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité.
On désigne par F_T la fonction de répartition de T.

Q11. Déterminer $F_T(x)$ pour tout x réel.

Q12. Donner une densité f_T de la variable aléatoire T.

Q13. Montrer que T admet une espérance et montrer que $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Q14. Reconnaître la loi de T^2. En déduire sans calcul l'existence et la valeur de $\mathbb{E}\left(T^2\right)$.

Q15. Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(X)$ et de $\mathbb{V}(T)$.

Problème 2 | Structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et étude d'endomorphismes de $\mathbb{R}^n$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle \bullet \,|\bullet \rangle$.
On note par ailleurs $\|\bullet\|$ la norme associée.

Partie A | Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 3$.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$. On pose $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, -1)$ et $w = (1, 2, 1)$.
On note $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On rappelle que (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q16. Montrer que F est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Q17. Déterminer la dimension de F.

Q18. Montrer que (u, v) est une base orthogonale de F.

Q19. Montrer que (w) est une base de $F^\perp$.

Q20. Trouver des réels α, β et γ tels que $\mathcal{B} = (\alpha u, \beta v, \gamma w)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Q21. Déterminer les coordonnées de e_1 dans la base $\mathcal{B}$.

Q22. On désigne par p_F la projection orthogonale sur F, et on désigne par A la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Q23. Écrire la matrice Δ représentative de p_F dans la base $\mathcal{B}$.

Q24. Donner une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P\Delta P^{-1}$.

Q25. La matrice A est-elle inversible ?

Q26. Montrer que A est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de A et donner une base de chaque sous-espace propre.

Q27. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

Q28. Donner un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ non nul tel que $\|p_F(x)\| = \|x\|$.

Q29. Déduire de ce qui précède l'existence et la valeur de $\max\left\{\dfrac{\|p_F(x)\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$.

Partie B | Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette partie, on revient au cas général en supposant que n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
v désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ que l'on supposera être de norme 1.
On considère alors l'application φ définie par : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \langle x \,|v \rangle\, v \end{array} \right.$.

Q30. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Q31. Montrer que φ est un projecteur et que $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est la droite vectorielle engendrée par v.

Q32. Montrer que φ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

Q33. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Q34. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$.

Q35. Établir l'existence et déterminer la valeur de $\max\left\{\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$.

Q36. Soit s l'application définit par : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ s(x) = 2\varphi(x) - x.$
Montrer que s est une symétrie de $\mathbb{R}^n$.

Q37. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de s.

Q38. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Partie C | Une caractérisation des projections orthogonales

Dans cette dernière partie, H désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension r telle que $1 \leq r \leq n-1$.

Partie C-1 | Particularité d'une projection orthogonale

Dans cette partie uniquement, p_H désigne la projection orthogonale sur H.

Q39. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p_H(x)\| \leq \|x\|$ et préciser les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels on a l'égalité.

Q40. Établir l'existence et déterminer la valeur de $\max\left\{\dfrac{\|p_H(x)\|}{\|x\|},\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$.

Partie C-2 | Étude la réciproque

Dans cette uniquement p désigne une projection sur H qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Q41. Soit $x \in (\operatorname{Ker}(p))^{\perp}$. Calculer $\langle x \,|p(x) - x\rangle$.

Q42. Montrer que p est une projection orthogonale.

Problème n° 3 | Calculs d'une somme de série et d'une intégrale

Partie A | Calcul de la somme d'une série

Dans cette partie, on veut déterminer la valeur de $\zeta_2 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\cos^m(t) = (\cos(t))^m$.

Q43. Rappeler la nature de la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2}$.

Q44. Calculer W_0 et W_1.

Q45. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $W_n > 0$.

Q46. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

Q47. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$.

Q48. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1} J_{n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Q49. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{2n+2}{2n+1} J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}$.

Q50. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = -\frac{2}{(2n+2)^2}$.

Q51. Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

Q52. On admet que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi} t \leq \sin(t) \leq t$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$.

Q53. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < J_n \leq \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}$.

Q54. Déterminer la valeur de $\zeta_2 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

Q55. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$.

À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et en calculer sa somme que l'on notera S_2 pour la suite du problème.

Partie B | Calcul d'une intégrale

Q56. Montrer que : $\forall x \in [0;1]\,,\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}x^{p-1} = \frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$.

Q57. Justifier que : $\forall x \in [0;1]\,,\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\ln(1+x) - \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{1+n}$

Q58. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Q59. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$

Q60. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Problème n° 4 | Étude d'un couple de variables aléatoires

Dans tout ce problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Si X est une variable aléatoire possédant une espérance et une variance, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, on définit la covariance de X et de Y notée $\mathrm{Cov}(X,Y)$ par la formule : $\quad \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

On a alors que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$ et $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X)$.

Partie A | Préliminaires

Q61. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ tous deux réels strictement positifs.

Montrer que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Q62. Sans soulever de problème d'existence, montrer que si X, Y et Z sont trois variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, alors :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(Z, aX+bY) = a\mathrm{Cov}(Z,X) + b\mathrm{Cov}(Z,Y)$$

et : $\quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbb{V}(aX+bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Pour toute la suite du problème, on admet le résultat suivant : pour tout entier $n \geq 2$, tout $n-$uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et toute famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, on a :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \\ i\neq j}} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Partie B | Matrices des covariances

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes, définies ur $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

On suppose que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre 1.

Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $Y_k = X_1 + \ldots + X_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

On pose $M_n = \left(\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal à $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.

M_n est appelée matrice des covariances de la famille $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Partie B-1 | Loi de Y_k

Q63. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, déterminer la loi de Y_k, puis donner, sans démonstration, son espérance $\mathbb{E}(Y_k)$ et sa variance $\mathbb{V}(Y_k)$.

Partie B-2 | Étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on se place dans le cas où $n = 2$.

Q64. Expliciter la matrice M_2.

Q65. Montrer que M_2 est inversible et expliciter son inverse.

Partie B-3 | Étude du cas général

Dans tout ce qui suit désormais, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Q66. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i < j$. Montrer que $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = i$.

Q67. Expliciter la matrice M_n.

Q68. On note T_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice dont tous les termes situés au-dessus de la diagonale sont égaux à 1, et tous ceux qui sont strictement dessous la diagonale sont tous nuls. Par ailleurs on note $t_{i,j}$ le terme général de la matrice T_n.

Ainsi : $t_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \leq j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$

Montrer que T_n est inversible et calculer son inverse que l'on notera R_n.

Q69. Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A.
Exprimer alors M_n en fonction T_n et $T_n^\top$.

Q70. Justifier que M_n est inversible, et exprimer $(M_n)^{-1}$ en fonction de R_n et de $(R_n)^\top$.

Q71. Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $Z_n = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathbb{V}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i Y_i\right) = (T_n Z_n)^\top (T_n Z_n)$.

Q72. On pose alors $W_n = T_n Z_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Exprimer Z_n en fonction de R_n et W_n.

Q73. Montrer que : $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1})^2\right) + w_n^2$.

Q74. Vérifier que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

Q75. Montrer que : $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) \leq 4 (W_n)^\top W_n$.

Q76. Conclure que, pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \leq \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i Y_i\right)$.