Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Réaliser l'entête de votre devoir en respectant les éléments suivants : inscrire en haut à gauche de la première copie double, vos nom (en majuscules et en rouge) et prénom (en écriture spéculaire et en bleu) tels qu'ils figurent sur votre dossier d'inscription en commençant au plus à 1 cm du bord gauche de la feuille et au plus à 3 cm du bord supérieur de la feuille, puis au même niveau sur la partie droite de la page, inscrire la date du devoir au format JJ-MM-AAAA ; en sautant une ligne, sous votre nom, inscrire « CPGE-BL 1^{e}année » ; en laissant un espacement d'environ 2 cm par rapport à la dernière ligne écrite, inscrire en toutes lettres, et en respectant la casse, « Tarea n° 15 » au centre de la ligne ; pour finir, laisser un espacement d'environ 2 cm par rapport à cette dernière ligne, tirer un trait horizontal sur la totalité de la largeur de la page, sous ce trait recopier la citation de Laurent Schwartz (1915-2002), mathématicien français « Trouver quelque chose en mathématiques, c'est vaincre une inhibition et une tradition », puis récitez la blague mathématiques que vous avez trouvée.

Problème n° 1 | Suite homographique

Dans tout ce problème, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par les relations :

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} &= \dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1} \end{cases}$$

Partie A | Utilisation d'une suite auxiliaire

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$.

Q2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni une suite géométrique, ni une suite arithmétique.

Q3. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Q4. Déduire de ce qui précède une expression de v_n en fonction de n.

Q5. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

Partie B | Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q6. Démontrer que alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = 2 \times \dfrac{1 - 3 \times 2^n}{1 - 2^{n+1}}$

Q7. Établir que l'on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = 2 - \dfrac{2^{n+1}}{1 - 2^{n+1}}$

Q8. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle valeur ?

Problème n° 2 | Recherche du terme général d'une suite

On se propose dans ce problème de déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 &= -\dfrac{1}{2} \\ u_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} &= u_{n+1} + 6u_n + 3 \end{cases}$$

Partie A | Calcul des puissances d'une matrice

Dans tout ce qui suit, on considère les deux matrices A et P de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q9. Calculer $A^2 - A$.

Q10. Montrer que la matrice A est inversible, et en donner son expression en fonction de A et de I_2.

Q11. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.

Q12. On désigne par D la matrice $D = P^{-1}AP$. Déterminer D.

Q13. Démontrer par récurrence sur l'entier n que l'on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de A^n en fonction de n.

Q15. L'expression donnant les coefficients A^n obtenue précédemment est-elle encore valable pour $n = -1$?

Partie B | Transformation du problème

Dans tout ce qui suit, on désigne par B la matrice colonne de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donnée par $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne X_n de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ par $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Q16. Déterminer la matrice colonne X_2.

Q17. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B$.

Q18. Montrer que l'équation $AY + B = Y$ d'inconnue la matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution L que l'on déterminera.

Q19. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

Q20. Déduire des questions précédentes que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3}{10}\left(3^n - (-2)^n\right) - \dfrac{1}{2}$.

Problème n° 3 | Suites imbriquées

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premier terme respectif $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$, et par les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}v_n \end{array} \right.$$

On se propose dans cet exercice de déterminer le terme général des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis d'en déterminer les limites.

Partie A | Étude de la suite de terme général $v_n - u_n$

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_n - u_n$.

Q21. Déterminer les valeurs de w_0 et de w_1.

Q22. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{15}$.

Q23. Donner alors l'expression du terme général de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Q24. Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie B | Sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$ en fonction de w_n.

Q26. Déduire de ce qui précède le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q27. Justifier alors que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers la même limite que l'on notera ℓ par la suite.

Partie C | Recherche de la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 3u_n + 10v_n$

Q28. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, qu'elle est sa limite ?

Q29. Démontrer par récurrence que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

Q30. En déduire la valeur de ℓ.

Partie D | Recherche du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre le système linéaire de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \alpha \\ 3 & 10 & \beta \end{array}\right)$ où (α, β) est un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.

Q32. Déduire de ce qui précède une expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Q33. Retrouver alors la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 4 | Constante d'Euler

Dans tout cet exercice, on considère la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Partie A | Préliminaire technique

On admet que : $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[,\, \ln(1+x) \leq x$.

Q34. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\, \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$
Puis en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \ln(n+1) \leq h_n$.

Q35. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

Partie B | Étude de la suite $(h_n)_{n\geq 1}$

Q36. Montrer que la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

Q37. Étudier la convergence de la suite $(h_n)_{n\geq 1}$.

Partie C | Étude de deux suites

Dans tout ce qui suit, on considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = h_n - \ln(n) \text{ et } v_n = h_n - \ln(n+1)$$

Q38. Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$.

Q39. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_n - v_n$, et en déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite que l'on notera γ.

Q40. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, v_n \leq \gamma \leq u_n$.

Q41. Démontrer que $\dfrac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Partie D | Étude d'une suite définie par une somme

Dans tout ce qui suit, on considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Q42. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, S_n = h_{2n} - h_n$.

Q43. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

Q44. Démontrer alors que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.