Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Problème n° 1 | Étude d'une variable aléatoire à densité

Les variables aléatoires de ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. Si Y est une variable aléatoire qui admet une espérance et une variance, on note respectivement $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X)$ son espérance et sa variance.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{|x|}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Partie A | Étude de la fonction f

Q1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 1| Éléments de réponse

f est clairement continue sur chacun des deux intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.
Il reste à étudier sa continuité en 0. On a directement que :

- **Limite à gauche en 0 :** il est immédiat que $-\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et que $f(0) = 0$ ce qui assure la continuité à gauche en 0 de f.
- **Limite à droite en 0 :** il est immédiat que $\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et que $f(0) = 0$ ce qui assure la continuité à droite en 0 de f.

f étant continue à gauche et à droite en 0, par théorème, elle est continue en 0 et par suite, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Q2. Étudier la parité de f.

Q 2| Éléments de réponse

Il est immédiat que le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0, et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) &= \frac{|-x|}{2}\mathrm{e}^{-\frac{(-x)^2}{2}} \\ &= \frac{|x|}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ce qui assure la parité de f.

Q3. Étudier la dérivabilité de f en 0.

Q 3| Éléments de réponse

Il s'agit de d'étudier la limite en 0 du quotient $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)}{x}$.

Il est immédiat que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{2x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -\dfrac{x}{2x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

c'est à dire que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Par suite, comme $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, on en déduit que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ ce qui induit que f n'est pas dérivable en 0.

Q4. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$ en précisant les limites de f aux bornes de $[0;+\infty[$ et la valeur des extrema de f sur cet intervalle.

Q 4| Éléments de réponse

Limite de f en 0 : Comme f est continue en 0, on a que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0) = 0$.

Limite de f en $+\infty$: Pour $x > 0$, on peut écrire $x = \sqrt{t}$ pour $t > 0$, et par suite on a que si $x \longrightarrow +\infty$ alors $t \longrightarrow +\infty$ et si $t \longrightarrow +\infty$ on a $x \longrightarrow +\infty$.

Par ailleurs, on a que $f(x) = \dfrac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et par croissances comparées que $t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dérivée de f sur $]0;+\infty[$: il est immédiat que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Variations de f sur $[0;+\infty[$: les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$ qui, compte-tenu de la positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, est exactement celui de $x \longmapsto 1 - \dfrac{x^2}{2}$ qui est une fonction polynôme de degré qui s'annule en $\pm\sqrt{2}$.

Par suite, on en déduit que puisque $f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\mathrm{e}}$:

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $1 - \dfrac{x^2}{2}$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Q5. Esquisser la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Q 5| Éléments de réponse

Q6. Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Q 6| Éléments de réponse

En désignant par g cette fonction, il est immédiat que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Q7. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Q 7| Éléments de réponse

f est une densité de probabilité puisque :

f **est positive sur** $\mathbb{R}$ **:** puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, il est immédiat que f est positive sur $\mathbb{R}$.

f **est continue sur** $\mathbb{R}$**, sauf éventuellement en quelques points :** on a montré que f est continue sur $\mathbb{R}$, ce qui assure ce premier point.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **est convergente et vaut** 1 **:** la fonction $x \longmapsto \dfrac{|x|}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en ses deux bornes.

Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **:** soit $A \geq 0$. Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}\end{aligned}$$

et comme $\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, ce qui assure la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ **:** soit $A \leq 0$. Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}\int_A^0 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{-A} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{-A} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}\end{aligned}$$

et comme $\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, ce qui assure la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Finalement, il vient que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

Partie B | Étude d'une variable aléatoire de densité f

On désigne pour toute la suite du problème par X une variable aléatoire de densité f, et on admet que X possède une espérance.

Q8. Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

Q 8| Éléments de réponse

Dès lors que $\mathbb{E}(X)$ existe, ce qui est le cas ici par hypothèse, cette dernière est $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

La fonction f étant paire, il vient que la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est impaire, et par suite que : $\forall A \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^A tf(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-A}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Par suite, il vient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t$ et donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et donc que $\mathbb{E}(X) = 0$.

Q9. On note F_X la fonction de répartition de X. Montrer que : $F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Q 9| Éléments de réponse

Par définition d'une fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$.
et comme X est de densité f : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Compte-tenu de l'expression de f, on a :

Si $x \leq 0$ **:** Soit $A \leq 0$. Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_A^x -\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_A^x\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}\end{aligned}$$

et comme $\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Si $x > 0$ **:** Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^x\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{2}\\ &= 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

et donc on a bien que : $F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \leq 0\\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0\end{cases}$

Q10. Résoudre l'équation $F_X(x) = \frac{3}{4}$ d'inconnue x. Que représente la solution trouvée pour la variable aléatoire X ?

Q 10| Éléments de réponse

Puisque $F_X(0) = \frac{1}{2}$ et comme F_X est une fonction de répartition et donc croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation $F_X(x) = \frac{3}{4}$ ne peut avoir de solution que sur $]0; +\infty[$.

Par suite sous l'hypothèse $x \geq 0$, il vient que :
$$\begin{aligned}\left(F_X(x) = \frac{3}{4}\right) &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{3}{4}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{x^2}{2} = -\ln(2)\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x^2 = \sqrt{2}\ln(2)\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x = \sqrt{\sqrt{2}\ln(2)}\right)\end{aligned}$$

Par définition $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$ et donc on a que $\mathbb{P}\left(\left[X \leq \sqrt{\sqrt{2}\ln(2)}\right]\right) = \frac{3}{4}$.

Partie C | Étude d'une autre variable aléatoire

On pose $T = |X|$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité.
On désigne par F_T la fonction de répartition de T.

Q11. Déterminer $F_T(x)$ pour tout x réel.

Q 11| Éléments de réponse

Par définition :

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) &= \mathbb{P}([T \leq x]) \\
&= \mathbb{P}([|X| \leq x]) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathbb{P}([-x \leq X \leq x]) & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathbb{P}([X \leq x]) - \mathbb{P}([X < -x]) & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mathbb{P}([X \leq x]) - \mathbb{P}([X \leq -x]) & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ F_X(x) - F_X(-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases}
\end{aligned}
$$

Q12. Donner une densité f_T de la variable aléatoire T.

Q 12| Éléments de réponse

Une densité de F_T est une fonction f_T qui ne diffère de F_T' qu'en un nombre fini de points. On peut alors proposer :

$$
f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases}
$$

Q13. Montrer que T admet une espérance et montrer que $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

Q 13| Éléments de réponse

T admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_T(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, ce qui compte-tenu de l'expression de f_T revient à établir la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et d'en calculer la valeur, cette dernière donnant ainsi $\mathbb{E}(T)$.

La fonction $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f_T(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Soit alors $A \geq 0$. En effectuant une intégration par parties en posant :

$$
\begin{array}{lcl}
u(x) = x & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = 1 \\
v(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}
\end{array}
$$

où u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$, on obtient que :

$$
\begin{aligned}
\int_0^A x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x &= \left[-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^A + \int_0^A \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= A\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + \int_0^A \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

En posant $t = \sqrt{A}$, par croissance comparées on peut établir que $A^{\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, on sait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1, ce qui assure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ et convergente, puis par parité de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Finalement, il vient que $\displaystyle\int_0^A x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et donc que $\mathbb{E}(T)$ existe avec $\mathbb{E}(T) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

Q14. Reconnaître la loi de T^2. En déduire sans calcul l'existence et la valeur de $\mathbb{E}\left(T^2\right)$.

Q 14| Éléments de réponse

On recherche la fonction de répartition de T^2.
Par définition, on a : $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\left(\left[T^2 \leq x\right]\right) &= \mathbb{P}\left(\left[|X|^2 \leq x\right]\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} 0 < x \\ \mathbb{P}\left(\left[|X| \leq \sqrt{x}\right]\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} 0 < x \\ F_X\sqrt{x} - F_X-\sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} 0 < x \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases}\end{aligned}$$
et ainsi, T^2 sur la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.
On sait alors que T^2 admet une espérance qui vaut $\frac{1}{2}$.

Q15. Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(X)$ et de $\mathbb{V}(T)$.

Q 15| Éléments de réponse

X admet une variance si X^2 admet une espérance. Or $X^2 = |X|^2$, c'est à dire $X^2 = T^2$ ce qui assure que X^2 admet une espérance, et donc que $\mathbb{V}(X)$ existe.
Par la formule de Huygens, on a alors que : $$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(X\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
Sur le même principe, puisque T^2 admet une espérance, T admet une variance.
Par ailleurs, toujours par la formule de Huygens, on a que : $$\begin{aligned}\mathbb{V}(T) &= \mathbb{E}\left(T^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(T\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Problème 2 | Structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et étude d'endomorphismes de $\mathbb{R}^n$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique noté $\langle \bullet | \bullet \rangle$.
On note par ailleurs $\|\bullet\|$ la norme associée.

Partie A | Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 3$.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$. On pose $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, -1)$ et $w = (1, 2, 1)$.
On note $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On rappelle que (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q16. Montrer que F est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Q 16| Éléments de réponse

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, ce qui assurera que F est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

$F \subset \mathbb{R}^3$ **:** par construction de F.

$\overrightarrow{0} = (0, 0, 0) \in F$ **:** en effet, $0 + 2 \times 0 + 0 = 0$

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $\begin{cases} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u_1 = (x_1, y_1, z_1) & \in & F \\ u_2 = (x_2, y_2, z_2) & \in & F \end{cases}$

On note $u_3 = \lambda u_1 + u_2$ où l'on note $u_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Montrons que $u_3 \in F$, c'est à dire que $x_3 + 2y_3 + z_3 = 0$.

Par construction de u_3, on a les relations : $\begin{cases} x_3 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ y_3 & = & \lambda y_1 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda z_1 + z_2 \end{cases}$

Un calcul direct donne alors que :
$$\begin{aligned} x_3 + 2y_3 + z_3 &= \lambda x_1 + X_1 + 2(\lambda y_1 + y_2) + \lambda z_1 + z_2 \\ &= \lambda \underbrace{(x_1 + 2y_1 + z_1)}_{=0 \text{ car } u_1 \in F} + \underbrace{x_2 + 2y_2 + z_2}_{=0 \text{ car } u_2 \in F} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui assure que $u_3 \in F$ et donc que F est bien stable par combinaison linéaire.

Q17. Déterminer la dimension de F.

Q 17| Éléments de réponse

Par définition de F, on a :
$$\begin{aligned} (u = (x, y, z) \in F) &\Leftrightarrow (x + 2y + z = 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -2y & - & z \\ y & = & y & & \\ z & = & & & z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow ((x, y, z) \in \operatorname{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))) \end{aligned}$$

Par suite, $F = \operatorname{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Les deux vecteurs $(-2, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ étant clairement non nuls et non colinéaires, ils forment une famille libre de F, et donc la famille formée par ces deux vecteurs est une base de F, ce qui assure alors que F est de dimension 2.

Q18. Montrer que (u, v) est une base orthogonale de F.

Q 18| Éléments de réponse

Il est immédiat que u et v sont non nuls, et un calcul direct donne que $\langle u | v \rangle = 0$, ce qui assure que u et v sont orthogonaux.
Par théorème, ils forment donc une famille libre.
Par ailleurs, il est facile de vérifier que $u \in F$ et $v \in F$, et par suite, ils forment une famille libre de 2 vecteurs de F qui est de dimension 2, donc par théorème, ils en en forment une base, accessoirement orthogonale.

Q19. Montrer que (w) est une base de $F^{\perp}$.

Q 19| Éléments de réponse

Puisque $\dim(F) = 2$ et $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$, par théorème, $\dim\left(F^{\perp}\right) = 1$.
Par ailleurs, un calcul direct donne que $\langle u\,|w\,\rangle = 0$ et $\langle v\,|w\,\rangle = 0$, et donc w étant orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F, il appartient à l'orthogonal de F.
Par suite, il vient que $F^{\perp}$ est une droite vectorielle engendrée par w.

Q20. Trouver des réels α, β et γ tels que $\mathcal{B} = (\alpha u, \beta v, \gamma w)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Q 20| Éléments de réponse

La famille (u, v, w) est clairement orthogonale, et en prenant $\alpha = \dfrac{1}{\|u\|}$, $\beta = \dfrac{1}{\|v\|}$ et $\gamma = \dfrac{1}{\|w\|}$, la famille $\mathcal{B} = (\alpha u, \beta v, \gamma w)$ est alors une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Q21. Déterminer les coordonnées de e_1 dans la base $\mathcal{B}$.

Q 21| Éléments de réponse

Par théorème, on a que :

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & \langle e_1\,|\alpha u\,\rangle \times \alpha u + \langle e_1\,|\beta v\,\rangle \times \beta v + \langle e_1\,|w\,\rangle \times \gamma w \\ & = & \alpha^2 \underbrace{\langle e_1\,|u\,\rangle}_{=1} u + \beta^2 \underbrace{\langle e_1\,|v\,\rangle}_{=0} v + \gamma^2 \underbrace{\langle e_1\,|w\,\rangle}_{=-1} w \\ & = & \alpha^2 u + \gamma^2 w \end{array}$$

Q22. On désigne par p_F la projection orthogonale sur F, et on désigne par A la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Q 22| Éléments de réponse

Puisque $\mathbb{B}$ est une base orthonormée de F, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\, p_F(x) = \langle x\,|\alpha u\,\rangle \times \alpha u + \langle x\,|\beta v\,\rangle \times \beta v + \langle x\,|\gamma w\,\rangle \times \gamma w$$

Par suite, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} p_F\left(e_1\right) & = & \langle e_1\,|\alpha u\,\rangle \times \alpha u + \langle e_1\,|\beta v\,\rangle \times \beta v + \langle e_1\,|\gamma w\,\rangle \times \gamma w \\ & = & \alpha^2 \underbrace{\langle e_1\,|u\,\rangle}_{=1} u + \beta^2 \underbrace{\langle e_1\,|v\,\rangle}_{=0} v + \gamma^2 \underbrace{\langle e_1\,|w\,\rangle}_{-1} w \\ & = & \ldots \\ & = & \dfrac{1}{6}\,(5, -2, -1) \end{array}$$

et sur le même principe, il vient que $p_F\left(e_2\right) = \dfrac{1}{6}\,(-2, 2, -2)$ et $p_F\left(e_3\right) = \dfrac{1}{6}\,(-1, -2, 5)$.

Par construction de la matrice de f dans la base canonique, il vient alors que $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Q23. Écrire la matrice Δ représentative de p_F dans la base $\mathcal{B}$.

Q 23| Éléments de réponse

La base $\mathcal{B}$ est clairement obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de $F^{\perp}$ qui sont supplémentaire de $\mathbb{R}^3$.
La base $\mathcal{B}$ est donc adapée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^{\perp}$.

Par suite, la matrice Δ de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q24. Donner une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P\Delta P^{-1}$.

Q 24| Éléments de réponse

A et Δ représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes, en notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, d'après les formules de changement de base, on a que $A = P\Delta P^{-1}$.

Q25. La matrice A est-elle inversible ?

Q 25| Éléments de réponse

Puisque $A = P\Delta P^{-1}$, A est inversible si, et seulement si, Δ l'est. Or Δ est une matrice diagonale dont un des termes diagonaux est nul, donc n'est pas inversible, et donc A non plus.

Q26. Montrer que A est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres de A et donner une base de chaque sous-espace propre.

Q 26| Éléments de réponse

Puisque $A = P\Delta P^{-1}$ avec Δ diagonale, par définition, A est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de Δ, à savoir 0 et 1.
Par ailleurs, par construction de Δ, $E_1(A) = F$ et $E_0(A) = F^{\perp}$, dont on connaît déjà des bases.

Q27. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

Q 27| Éléments de réponse

La famille $\mathcal{B}$ étant une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, en désignant par (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$, il vient que $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et puisque les coordonnées de $p_F(x)$ dans cette même base sont $(x_1, x_2, 0)$, il vient que $\|p_F(x)\|^2 = x_1^2 + x_2^2$, ce qui assure l'inégalité demandée.

Q28. Donner un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ non nul tel que $\|p_F(x)\| = \|x\|$.

Q 28| Éléments de réponse

Tout vecteur non nul de F satisfait cette égalité par construction de la projection orthogonale sur F.

Q29. Déduire de ce qui précède l'existence et la valeur de $\max\left\{\dfrac{\|p_F(x)\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$.

Q 29| Éléments de réponse

D'après ce qui précède : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\},\ \dfrac{\|p_F\,(x)\|}{\|x\|} \leq 1.$

Donc $\sup\left\{\dfrac{\|p_F(x)\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$ existe et vaut au plus 1.

Par ailleurs, il existe au moins un vecteur x_0 non nul tel que $\|p_F\,(x_0)\| = \|x_0\|$ et donc $\max\left\{\dfrac{\|p_F(x)\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$ existe et vaut 1.

Partie B | Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette partie, on revient au cas général en supposant que n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
v désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ que l'on supposera être de norme 1.
On considère alors l'application φ définie par : $\quad \varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & \langle x\,|v\rangle\, v \end{array}\right.$.

Q30. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Q 30| Éléments de réponse

Soient $\begin{cases} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ x & \in & \mathbb{R}^n \\ y & \in & \mathbb{R}^n \end{cases}$

Posons $z = \lambda x + y$, et montrons que $f(z) = \lambda f(x) + f(y)$.

Un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} f(z) & = & \langle \lambda x + y \,|v \rangle \, v \\ & = & (\lambda \langle x \,|v \rangle + \langle y \,|z \rangle) \, v \\ & = & \lambda \langle x \,|v \rangle \, v + \langle y \,|z \rangle \, v \\ & = & \lambda f(x) + f(y) \end{array}$

ce qui assure le caractère linéaire de φ.

Il est immédiat que $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et comme φ est linéaire, il vient que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Q31. Montrer que φ est un projecteur et que $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est la droite vectorielle engendrée par v.

Q 31| Éléments de réponse

Par théorème, φ est un projecteur si, et seulement si, $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

Un calcul direct donne que : $\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\varphi(x)) & = & \varphi(\langle x \,|v \rangle \, v) \\ & = & \langle x \,|v \rangle \, \varphi(v) \\ & = & \langle x \,|v \rangle \underbrace{\langle v \,|v \rangle}_{=1} v \\ & = & \langle x \,|v \rangle \, v \\ & = & \varphi(x) \end{array}$

et par suite φ est un projecteur.

Par ailleurs, il est immédiat que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x)$ est colinéaire à v par définition de φ, ce qui assure que $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est une droite vectorielle engendrée par v.

Q32. Montrer que φ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

Q 32| Éléments de réponse

φ étant un projecteur, on sait qu'il s'agit du projecteur sur $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ de direction $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$.

Il est immédiat que : $\forall x \in \mathrm{Vect}\,(v)^{\perp}, \langle x \,|v \rangle = 0$

ce qui assure que : $\forall x \in \mathrm{Vect}\,(v)^{\perp}, \varphi(x) = 0$

et donc que $\mathrm{Vect}\,(v)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Comme $\mathrm{Im}\,(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(v)$ est une droite vectorielle, son orthogonal est de dimension $n-1$. Par ailleurs, d'après le théorème du rang, on sait que $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) = n-1$, ce qui assure que $\mathrm{Vect}\,(v)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ et donc que φ est bien la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(\varphi)$.

Q33. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Q 33| Éléments de réponse

Comme $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, on en déduit que 0 est valeur propre et que $E_0\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$.

Par ailleurs, il est immédiat que $\varphi(v) = v$, ce qui assure que 1 est valeur propre de φ, et comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus égale à la dimension de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que $E_1(\varphi)$ est de dimension 1, et que $E_1\,(\varphi)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur v.

Par suite, φ est donc tel que $\dim(E_0\,(\varphi)) + \dim(E_1\,(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}^n)$, et donc par théorème φ est diagonalisable.

Q34. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$.

Q 34| Éléments de réponse

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Il est immédiat par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :
$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| &= \|\langle x\,|v\,\rangle\, v\| \\ &= |\langle x\,|v\,\rangle|\, \|v\| \\ &= |\langle x\,|v\,\rangle| \\ &\leq \|x\|\,\|v\| \\ &= \leq \|x\| \end{aligned}$$
ce qui est bien le résultat attendu.

Q35. Établir l'existence et déterminer la valeur de $\max\left\{\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|},\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$.

Q 35| Éléments de réponse

De la question précédente, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\},\ \dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \leq 1$

ce qui assure l'existence $\sup\left\{\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|},\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$ qui vaut au plus 1.

Par ailleurs, comme $\varphi(v) = v$, cette borne supérieure est atteinte et vaut 1, et par suite $\max\left\{\dfrac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|},\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$ existe et vaut 1.

Q36. Soit s l'application définit par : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ s(x) = 2\varphi(x) - x$.
Montrer que s est une symétrie de $\mathbb{R}^n$.

Q 36| Éléments de réponse

Par théorème, on sait que : (s est une symétrie) $\Leftrightarrow$ $(s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.
Il est immédiat ici que :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n,\ s\left(s(x)\right) &= s\left(2\varphi(x) - x\right) \\ &= s\left(2\left\langle x\,|v\,\right\rangle v - x\right) \\ &= 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle s(v) - s(x) \\ &= \left\langle x\,|v\,\right\rangle \left(2\varphi(v) - v\right) - s(x) \\ &= 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle v - s(x) \\ &= 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle v - 2\varphi(x) + x \\ &= 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle - 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle v + x \\ &= x \end{aligned}$$
ce qui assure bien que $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Q37. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de s.

Q 37| Éléments de réponse

s étant un symétrie vectorielle on sait qu'il s'agit de la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ et de direction $\mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ avec $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \oplus \mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ et en construisant la matrice de s dans la base adaptée à cette somme directe, cette dernière est la matrice diagonale où les $\dim\left(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\right)$ premiers termes diagonaux valent 1 et les $\dim\left(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\right)$ suivants valent -1.
Ainsi, les valeurs propres de s sont 1 et -1 et les sous-espaces propres associés sont $\mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ et $\mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Q38. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|s(x)\| = \|x\|$.

Q 38| Éléments de réponse

Un calcul direct à partir de la définition donne que :
$$\begin{aligned} \|s(x)\|^2 &= \left\langle s(x)\,|s(x)\,\right\rangle \\ &= \left\langle 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle v - x\,|2\left\langle x\,|v\,\right\rangle v - x\,\right\rangle \\ &= 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle \times 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle \left\langle v\,|v\,\right\rangle - 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle \left\langle x\,|v\,\right\rangle - 2\left\langle x\,|v\,\right\rangle \left\langle x\,|v\,\right\rangle + \left\langle x\,|x\,\right\rangle \\ &= \left\langle x\,|x\,\right\rangle \\ &= \|x\|^2 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

Partie C | Une caractérisation des projections orthogonales

Dans cette dernière partie, H désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension r telle que $1 \leq r \leq n-1$.

Partie C-1 | Particularité d'une projection orthogonale

Dans cette partie uniquement, p_H désigne la projection orthogonale sur H.

Q39. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p_H(x)\| \leq \|x\|$ et préciser les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels on a l'égalité.

Q 39| Éléments de réponse

Par construction p_H est la projection sur H de direction $H^\perp$.
On a que $x = \underbrace{x - p_H(x)}_{\in H^\perp} + \underbrace{p_H(x)}_{\in F}$, donc d'après le théorème de Pythagore, il vient que $\|x\|^2 = \|x - p_H(x)\|^2 + \|p_H(x)\|^2$
ce qui donne que $\|p_H(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ et comme une norme est positive que $\|p_H(x)\| \leq \|x\|$.

Q40. Établir l'existence et déterminer la valeur de $\max\left\{\dfrac{\|p_H(x)\|}{\|x\|},\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$.

Q 40| Éléments de réponse

D'après la question précédente : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\},\ \dfrac{\|p_H(x)\|}{\|x\|} \leq 1$
ce qui assure l'existence de $\sup\left\{\dfrac{\|p_H(x)\|}{\|x\|},\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$.
Par ailleurs, par construction de p_H, pour $x \in H$, on a $p_H(x) = x$ ce qui assure que $\|p_H(x)\| = \|x\|$ et donc que $\max\left\{\dfrac{\|p_H(x)\|}{\|x\|},\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\}$ existe et est atteint en tout vecteur x de H et que l'on a $\max\left\{\dfrac{\|p_H(x)\|}{\|x\|},\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right\} = 1$.

Partie C-2 | Étude la réciproque

Dans cette uniquement p désigne une projection sur H qui vérifie : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Q41. Soit $x \in (\operatorname{Ker}(p))^\perp$. Calculer $\langle x \,|p(x) - x\rangle$.

Q 41| Éléments de réponse

p étant un projecteur, on a $p^2 = p$ ce qui assure que $x - p(x) \in \operatorname{Ker}(p)$, et donc par hypothèse sur x il vient que $\langle x \,|p(x) - x\rangle = 0$.

Q42. Montrer que p est une projection orthogonale.

Q 42| Éléments de réponse

Parce que p est un projecteur, on sait qu'il s'agit du projection sur $\operatorname{Im}(p)$ et de direction $\operatorname{Ker}(p)$ avec notamment que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ où l'on écrit $x = p(x) + x - p(x)$ avec $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker}(p)$.
On considère alors z le projecté orthogonal de $p(x)$ sur la droite vectorielle engendrée par $x - p(x)$. D'après la question précédente, on a donc que z et $p(x) - z$ sont orthogonaux puisque l'on sans dans ce cas que $z \perp \operatorname{Ker}(p)$.

Ainsi, on a par le théorème de Pythagore que : $$\begin{aligned} \|p(x)\|^2 &= \|z\|^2 + \|p(x) - z\|^2 \\ &\underset{\forall v \in \mathbb{R}^n,\, \|p(v)\| \leq \|v\|}{\geq} \|z\|^2 + \|p\,(p(x) - z)\|^2 \\ &\underset{z \in \mathrm{Vect}\,(x - p(x)) \subset \mathrm{Ker}\,(p)}{=} \|z\|^2 + \|p(x)\|^2 \end{aligned}$$
ce qui implique que $\|z\|^2 = 0$ et donc que $z = 0$. Par suite, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont orthogonaux, et donc que p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(p)$.

Problème n° 3 | Calculs d'une somme de série et d'une intégrale

Partie A | Calcul de la somme d'une série

Dans cette partie, on veut déterminer la valeur de $\zeta_2 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$$

On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\cos^m(t) = (\cos(t))^m$.

Q43. Rappeler la nature de la série $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$.

Q 43| Éléments de réponse

Il s'agit d'une série de Riemann convergente puisque $2 > 1$.

Q44. Calculer W_0 et W_1.

Q 44| Éléments de réponse

Calcul de W_0 : un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t \\ &= [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Calcul de W_1 : un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1+\cos(2t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Q45. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $W_n > 0$.

Q 45| Éléments de réponse

La fonction $t \longmapsto \cos(t)$ est positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et ne s'y annule qu'en $\frac{\pi}{2}$. Par suite, la fonction $t \longmapsto \cos^{2n}(t)$ est positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et ne s'y annule qu'en $\frac{\pi}{2}$, et par positivité de l'intégrale $W_n \geq 0$, et la fonction $t \longmapsto \cos(t)$ étant différente de la fonction nulle sur cet intervalle, on a donc que $W_n > 0$.

Q46. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 46| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} W_n - W_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{2n}(t) - \cos^{2n+2}(t)\right)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\left(1-\cos^2(t)\right)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Q47. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$.

Q 47| Éléments de réponse

En effectuant l'intégration par parties suivante :
$$\begin{aligned} u(t) &= \sin(t) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \quad & u'(t) = \cos(t) \\ v(t) &= -\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1}(t) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \quad & v'(t) = \sin(t)\cos^{2n}(t) \end{aligned}$$
où u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on obtient que :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[-\frac{1}{2n+1}\sin(t)\cos^{2n+2}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t$$
et donc que l'on a : $W_n - W_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}W_{n+2}$ et donc que $(2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$.

Q48. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1}J_{n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Q 48| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} J_n - J_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t^2\cos^{2n}(t) - t^2\cos^{2n+2}(t)\right)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\left(1-\cos^2(t)\right)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 sin(t)\times\sin(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
On effectue alors une intégration par parties en posant :
$$\begin{aligned} u(t) &= t^2 sin(t) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \quad & u'(t) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t) \\ v(t) &= -\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1}(t) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \quad & v'(t) = \sin(t)\cos^{2n}(t) \end{aligned}$$

où u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, pour obtenir que :

$$\begin{aligned} J_n - J_{n+1} &= \left[-\frac{1}{2n+1}t^2\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2t\sin(t)\cos^{2n+1}(t) + t^2\cos^{2n+1}(t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2n+1}J_{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1}J_{n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Q49. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{2n+2}{2n+1}J_{n+1} - J_n = \dfrac{-2}{(2n+1)(2n+2)}W_{n+1}$.

Q 49| Éléments de réponse

On effectue un intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= 2t & &\underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) &= 2 \\ v(t) &= -\frac{1}{2n+2}\cos^{2n+2}(t) & &\underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) &= \sin(t)\cos^{2n+1}(t) \end{aligned}$$

où u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, il vient que :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{2t}{2n+2}\cos^{2n+2}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{2n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{2n+2}W_{n+1} \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que : $J_n - J_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}J_{n+1} + \dfrac{2}{(2n+1)(2n+2)}W_{n+1}$
ce qui amènera à la relation demandée.

Q50. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \dfrac{J_n}{W_n} = -\dfrac{2}{(2n+2)^2}$.

Q 50| Éléments de réponse

Q51. Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{J_n}{W_n} - \dfrac{J_0}{W_0} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}$.

Q 51| Éléments de réponse

De la question précédente, par sommation il vient que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{J_{k+1}}{W_{k+1}} - \frac{J_k}{W_k}\right) &= -2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+2)^2} \\ &= -2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4(k+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Or on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{J_{k+1}}{W_{k+1}} - \frac{J_k}{W_k}\right) = \frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0}$
ce qui amène à la relation demandée.

Q52. On admet que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \ \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t.$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\left(W_n - W_{n+1}\right).$

Q 52| Éléments de réponse

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, \in W_n - W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$

De la question précédente, comme les trois membres de l'encadrement sont tous positifs, il vient que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \ \left(\frac{2}{\pi}t\right)^2 < (\sin(t))^2.$

Par suite, il vient que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \ \frac{4}{\pi^2}t^2 \leq \sin^2(t)$

et donc que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \ \frac{4}{\pi^2}t^2\cos^{2n}(t) \leq \sin^2(t)\cos^{2n}(t)$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi^2}t^2\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(t)\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$

ce qui assure donc que : $\frac{4}{\pi^2}J_n \leq W_n - W_{n+1}$

et qui donnera le membre de droite de l'encadrement demandé.

Le membre de gauche est trivial, dans le sens où la fonction $t \longmapsto t^2\cos^{2n}(t)$ n'étant pas la fonction nulle sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ mais y étant positive, le caractère positif de l'intégrale assure alors que $0 < J_n$.

Q53. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < J_n \leq \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}.$

Q 53| Éléments de réponse

On peut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ W_n \geq 0$

Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < J_n \leq \frac{\pi^2}{4}W_n.$

Par ailleurs, comme : $\forall n \in \mathbb{N}, \ (2n+2)W_{n+1} = (2n+1)W_n$

on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}W_n$

et par suite il vient : $\forall n \in \mathbb{N}, \ W_n - W_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$

ce qui donnera la majoration attendue.

Q54. Déterminer la valeur de $\zeta_2 = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}.$

Q 54| Éléments de réponse

De la question précédente, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < \frac{J_n}{W_n} \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)}$

et par conséquent, par le théorème d'encadrement que $\frac{J_n}{W_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = -\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}$

Il est immédiat que $J_0 = \frac{\pi^3}{12}$

Il vient donc que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2J_0}{W_0} = \frac{\pi^2}{6}$

et ainsi on a que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Q55. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$.

À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et en calculer sa somme que l'on notera S_2 pour la suite du problème.

Q 55| Éléments de réponse

Il est immédiat que la série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$ est absolument convergente, ce qui assure la convergence de la suite de ses sommes partielles, qui est exactement la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

On commence par remarquer que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

ce qui donne que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\\ &= \frac{3}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\\ &= \frac{3}{4}\zeta_2\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}$

ce qui donne que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$

et finalement que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}=\frac{3}{4}\zeta_2-\frac{1}{4}\zeta_2$

et on trouve alors que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}=\underbrace{\frac{1}{2}\zeta_2}_{=\frac{\pi^2}{12}}$.

Partie B | Calcul d'une intégrale

Q56. Montrer que : $\forall x\in[0;1]\,,\,\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}x^{p-1}=\frac{1}{x+1}-\frac{(-1)^nx^n}{1+x}$.

Q 56| Éléments de réponse

Il est clair que : $\forall x\in[0;1]\,,\,\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}x^{p-1}=\sum_{p=0}^{n-1}(-x)^p$

Ainsi : $\forall x\in[0;1]\,,\,\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}x^{p-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}$

et finalement : $\forall x\in[0;1]\,,\,\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}x^{p-1}=\frac{1}{1+x}-\frac{(-1)^nx^n}{1+x}$

Q57. Justifier que : $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{1+n}$

Q 57| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^x \left(\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}t^{p-1}\right) \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\right) \mathrm{d}t.$

ce qui amène directement à : $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^{n}\left((-1)^{p-1}\int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t\right) = \ln(1+x) - (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

et finalement à : $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(1+x) - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}x^p}{p} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

Par ailleurs, il est immédiat que : $\forall t \in [0;1], 0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$

donc par croissance de l'intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t$

ce qui donne que : $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$

Par suite, il vient que : $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}x^p}{p}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Q58. Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Q 58| Éléments de réponse

La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0;1]$, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa borne 0.
Or on sait que $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui assure que la fonction $x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est prolongeable par continuité par la valeur 0 en 0, et donc que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est faussement impropre en sa borne 0, donc qu'il s'agit d'une intégrale définie et donc est convergente.

Q59. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p^2}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$

Q 59| Éléments de réponse

On sait que : $\forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\ln(1+x) - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}x^p}{p}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$

donc : $\forall x \in]0;1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{\ln(1+x)}{x} - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}x^{p-1}}{p}\right| \leq \frac{x^n}{n+1}$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}x^{p-1}}{p}\right)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x$

et finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x - \sum_{p=1}^{n}\int_0^1 \left(\frac{(-1)^{p-1}x^{p-1}}{p}\,\mathrm{d}x\right)\right| \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x$

Il est clair que $\int_0^1 \left(\frac{(-1)^{p-1}x^{p-1}}{p}\right)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$ et que $\int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$, ce qui permet d'obtenir la relation demandée.

Q60. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

Q 60| Éléments de réponse

Le théorème d'encadrement donne à partir de la relation précédente que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Or on a vu que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S_2$, ce qui donne que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = S_2$

Problème n° 4 | Étude d'un couple de variables aléatoires

Dans tout ce problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Si X est une variable aléatoire possédant une espérance et une variance, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, on définit la covariance de X et de Y notée $\mathrm{Cov}(X,Y)$ par la formule : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

On a alors que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$ et $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X)$.

Partie A | Préliminaires

Q61. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ tous deux réels strictement positifs.

Montrer que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Q 61| Éléments de réponse

On note $Z = X + Y$ et il est immédiat que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.
En utilisant le système complet d'événements associés à X et à l'aide de la formule des probabilités totales, il vient que :

$$\begin{aligned}
\forall p \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Z=p]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}_{[X=k]}([Z=p]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=p-k]) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=p-k]) \\
&\underset{\substack{X \text{ et } Y \\ \text{indép.}}}{=} \sum_{k=0}^{p} \mathbb{P}([X=k])\, \mathbb{P}([Y=p-k]) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{p-k}}{(p-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!(p-k)!} \lambda^k \mu^{p-k} \\
&= \frac{1}{p!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} \lambda^k \mu^{p-k} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{p!} (\lambda+\mu)^p
\end{aligned}$$

ce qui assure que Z suit bien une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Q62. Sans soulever de problème d'existence, montrer que si X, Y et Z sont trois variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, alors :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Cov}(Z, aX+bY) = a\mathrm{Cov}(Z,X) + b\mathrm{Cov}(Z,Y)$$

et : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbb{V}(aX+bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Q 62| Éléments de réponse

Expression de $\mathrm{cov}(Z, aX+bY)$ **:** un calcul direct donne en utilisant la linéarité de l'espérance que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(Z, aX+bY) &= \mathbb{E}(Z(aX+bY)) - \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(aX+bY) \\
&= \mathbb{E}(aXZ+bYZ) - a\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(Y) - b\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X) \\
&= a\mathbb{E}(XZ) + b\mathbb{E}(YZ) - a\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(Y) - b\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(X) \\
&= a\mathrm{cov}(Z,X) + b\mathrm{cov}(Z,Y)
\end{aligned}$$

Expression de $\mathbb{V}(aX+bY)$ **:** il suffit d'utiliser la relation précédente et à l'appliquer à la variable aléatoire $aX+bY$.

Pour toute la suite du problème, on admet le résultat suivant : pour tout entier $n \geq 2$, tout $n-$uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et toute famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2, on a :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} a_i a_j \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{V}\left(X_i\right) + \sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2 \\ i\neq j}} a_i a_j \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right)$$

Partie B | Matrices des covariances

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes, définies ur $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.
On suppose que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre 1.

Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $Y_k = X_1 + \ldots + X_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

On pose $M_n = \left(\mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right)\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal à $\mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right)$.

M_n est appelée matrice des covariances de la famille $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Partie B-1 | Loi de Y_k

Q63. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, déterminer la loi de Y_k, puis donner, sans démonstration, son espérance $\mathbb{E}\left(Y_k\right)$ et sa variance $\mathbb{V}\left(Y_k\right)$.

Q 63| Éléments de réponse

Par construction, et en utilisant le résultat préliminaire, Y_k suit une loi de Poisson de paramètre $1 + \ldots + 1 = k$.
Par suite Y_k admet une espérance et une variance qui sont toutes les deux respectives égales à k.

Partie B-2 | Étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on se place dans le cas où $n = 2$.

Q64. Expliciter la matrice M_2.

Q 64| Éléments de réponse

Par construction $M_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}\left(Y_1, Y_1\right) & \mathrm{Cov}\left(Y_1, Y_2\right) \\ \mathrm{Cov}\left(Y_2, Y_1\right) & \mathrm{Cov}\left(Y_2, Y_2\right) \end{pmatrix}$
Par ailleurs, comme $\mathrm{Cov}\left(Y_1, Y_2\right) = \mathrm{Cov}\left(X_1, X_1 + X_2\right)$, en utilisant le résultat préliminaire, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}\left(Y_1, Y_2\right) & = & \mathrm{Cov}\left(X_1, X_1 + X_2\right) \\ & = & \mathrm{Cov}\left(X_1, X_1\right) + \mathrm{Cov}\left(X_1, X_2\right) \\ & = & \mathbb{V}\left(X_1\right) + \mathbb{E}\left(X_1 X_2\right) - \mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right) \\ & = & \mathbb{V}\left(X_1\right) + \mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right) - \mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right) \\ & = & \mathbb{V}\left(X_1\right) \end{array}$$

et par suite il vient que $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q65. Montrer que M_2 est inversible et expliciter son inverse.

Q 65| Éléments de réponse

La matrice M_2 étant un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par théorème M_2 est inversible si, et seulement si $\det\left(M_2\right) \neq 0$, ce qui est le cas ici car égal à 1.
Par ailleurs, on a que : $\left(M_2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie B-3 | Étude du cas général

Dans tout ce qui suit désormais, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Q66. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i < j$. Montrer que $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = i$.

Q 66| Éléments de réponse

Par construction, on a que :
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j) &= \mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_i + \textstyle\sum_{k=i+1}^{j} X_j\right)\\ &= \mathrm{Cov}(Y_i,Y_i) + \mathrm{Cov}\left(Y_i, \sum_{k=i+1}^{j} X_j\right)\\ &= \mathbb{V}(Y_i) + \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{i} X_i, \sum_{k=i+1}^{j} X_j\right)\\ &= i + \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{i} X_i, \sum_{k=i+1}^{j} X_j\right)\end{aligned}$$

Or les deux variables aléatoires $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} X_i$ et $\displaystyle\sum_{k=i+1}^{j} X_j$ étant indépendantes par le lemme des coalitions, $\mathrm{Cov}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{i} X_i, \sum_{k=i+1}^{j} X_j\right) = 0$, ce qui amène à $\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j) = i$.

Q67. Expliciter la matrice M_n.

Q 67| Éléments de réponse

La propriété de symétrie de la covariance donne que $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 2 & \dots & \dots & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$

Q68. On note T_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice dont tous les termes situés au-dessus de la diagonale sont égaux à 1, et tous ceux qui sont strictement dessous la diagonale sont tous nuls. Par ailleurs on note $t_{i,j}$ le terme général de la matrice T_n.

Ainsi : $t_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$

Montrer que T_n est inversible et calculer son inverse que l'on notera R_n.

Q 68| Éléments de réponse

La matrice T_n est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls, donc par théorème, elle est inversible.

On montre alors, par exemple en effectuant le produit matriciel $T_n \times R_n$ que $R_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & (0) \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & -1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

Q69. Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A.
Exprimer alors M_n en fonction T_n et $T_n^\top$.

Q 69| Éléments de réponse

On peut montrer que $M_n = T_n^\top \times T_n$.

Q70. Justifier que M_n est inversible, et exprimer $(M_n)^{-1}$ en fonction de R_n et de $(R_n)^\top$.

Q 70| Éléments de réponse

M_n s'exprimant comme le produit de deux matrices inversibles, par théorème, elle est inversible, et son inverse est $(M_n)^{-1} = T_n^{-1} \times \left(T_n^\top\right)^{-1}$ ce qui donne que $(M_n)^{-1} = R_n \times \left(R_n^\top\right)^{-1}$.

Q71. Soit $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $Z_n = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n z_i Y_i\right) = (T_n Z_n)^\top (T_n Z_n)$.

Q 71| Éléments de réponse

Tout d'abord, on remarque, à la représentation près des vecteurs que $(T_n Z_n)^\top (T_n Z_n) = \|T_n Z_n\|^2$ où il s'agit de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Par ailleurs, $T_n Z_n = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n z_i \\ \sum_{i=2}^n z_i \\ \vdots \\ \sum_{i=n}^n z_i \end{pmatrix}$ et donc $(T_n Z_n)^\top (T_n Z_n) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n z_i\right)^2$

Par ailleurs :
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_i Y_i &= \sum_{i=1}^n \left(z_i \sum_{k=1}^i X_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i z_i X_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=k}^n z_i X_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=k}^n z_i\right) X_k \end{aligned}$$

et donc par indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, il vient que $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X Y_i\right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=k}^n z_i\right)^2 \underbrace{\mathbb{V}(X_k)}_{=1}$ ce qui donne le résultat.

Q72. On pose alors $W_n = T_n Z_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exprimer Z_n en fonction de R_n et W_n.

Q 72| Éléments de réponse

T_n étant inversible, on a tout d'abord que $Z_n = (T_n)^{-1} W_n$ et comme $(T_n)^{-} 1 = R_n$, il vient que $Z_n = R_n W_n$.

Q73. Montrer que : $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1})^2 \right) + w_n^2$.

Q 73| Éléments de réponse

Sur le même principe que précédemment, on a tout d'abord que $R_n W_n = \begin{pmatrix} w_1 - w_2 \\ w_2 - w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} - w_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et donc comme $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) = \langle R_n W_n \,| R_n W_n \rangle = \|R_n W_n\|^2$, il vient que $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1})^2 \right) + w_n^2$.

Q74. Vérifier que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

Q 74| Éléments de réponse

Il est immédiat que $0 \leq (a-b)^2 0$, et donc que $-2ab \leq a^2 + b^2$ qui donne que $a^2 + b^2 - 2ab \leq a^2 + a^2 + b^2 + b^2$ et donc de faọn triviale que $(a-b)^2 \leq a^2 + b^2$.

Q75. Montrer que : $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) \leq 4 (W_n)^\top W_n$.

Q 75| Éléments de réponse

Des deux question précédentes, il vient que : $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(2w_i^2 + 2w_{i+1}^2\right) + w_n^2$

Ainsi, on a que : $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} w_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} w_{i+1}^2 + w_n^2$

et donc que : $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) \leq 2 \sum_{i=1}^{n-1} w_i^2 + w_n^2 + w_n^2 + w_1^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} w_{i+1}^2$

et donc que : $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) \leq 2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2$

ce qui donne que : $(R_n W_n)^\top (R_n W_n) \leq 4 \sum_{i=1}^{n} w_i^2$

et comme $(W_n)^\top (W_n) = \|W_n\|^2$ on a le résultat sur le même principe que précédemment.

Q76. Conclure que, pour tout $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\dfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \leq \mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i Y_i \right)$.

Q 76| Éléments de réponse

C'est un simple conséquence des majorations précédentes puisque $(T_n Z_n)^\top (T_n Z_n) = (W_n)^\top W_n$ par construction.