Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Réaliser l'entête de votre devoir en respectant les éléments suivants : inscrire en haut à gauche de la première copie double, vos nom (en majuscules et en rouge) et prénom (en écriture spéculaire et en bleu) tels qu'ils figurent sur votre dossier d'inscription en commençant au plus à $1\,\text{cm}$ du bord gauche de la feuille et au plus à $3\,\text{cm}$ du bord supérieur de la feuille, puis au même niveau sur la partie droite de la page, inscrire la date du devoir au format JJ-MM-AAAA ; en sautant une ligne, sous votre nom, inscrire « CPGE-BL 1^{e}année » ; en laissant un espacement d'environ $2\,\text{cm}$ par rapport à la dernière ligne écrite, inscrire en toutes lettres, et en respectant la casse, « Tarea n° 15 » au centre de la ligne ; pour finir, laisser un espacement d'environ $2\,\text{cm}$ par rapport à cette dernière ligne, tirer un trait horizontal sur la totalité de la largeur de la page, sous ce trait recopier la citation de Laurent Schwartz (1915-2002), mathématicien français « Trouver quelque chose en mathématiques, c'est vaincre une inhibition et une tradition », puis récitez la blague mathématiques que vous avez trouvée.

Q 1| Éléments de réponse

Sans objet, sauf que c'est parfois difficile de recopier quelque chose sans faire une erreur. . .
Une petit blague en passant [a]. . .*Deux suites de Cauchy décident d'aller dans une boîte de nuit, appelée « no limit ». Mais le videur les arrête tout de suite : « Navré mesdames, on est complet. »*

a. C'est une histoire d'espaces complets et de suites qui convergent. . .

Problème n° 1 | Suite homographique

Dans tout ce problème, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par les relations :

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1} &= \dfrac{4u_n-6}{u_n-1} \end{cases}$$

Partie A | Utilisation d'une suite auxiliaire

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n\in\mathbb{N},\, v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n-2}$.

Q2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni une suite géométrique, ni une suite arithmétique.

Q 2| Éléments de réponse

Par calcul direct il vient que : $\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_1 &= \dfrac{10}{3} \\ u_2 &= \dfrac{22}{7} \end{cases}$

On a les relations suivantes : $\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_1 &= \dfrac{5}{6}\times u_0 \\ u_2 &= \dfrac{33}{35}\times u_1 \end{cases}$

et comme $\dfrac{5}{6}\neq\dfrac{33}{35}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être géométrique.

De même : $\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_1 &= u_0 + \left(-\dfrac{2}{3}\right) \\ u_2 &= u_1 + \left(-\dfrac{4}{21}\right) \end{cases}$

et comme $-\dfrac{2}{3} \neq -\dfrac{4}{21}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être arithmétique.

Q3. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

Q 3| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}-2} \\ &= \frac{\dfrac{4u_n-6}{u_n-1}-3}{\dfrac{4u_n-6}{u_n-1}-2} \\ &= \frac{\dfrac{4u_n-6-3(u_n-1)}{u_n-2}}{\dfrac{4u_n-6-2(u_n-1)}{u_n-2}} \\ &= \frac{4u_n-6-3(u_n-1)}{4u_n-6-2(u_n-1)} \\ &= \frac{4u_n-6-3u_n+3}{4u_n-6-2u_n+2} \\ &= \frac{u_n-3}{2u_n-4} \\ &= \frac{u_n-3}{2(u_n-2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{u_n-3}{u_n-2} \\ &= \frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

ce qui assure que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-3}{u_0-2}$ c'est à dire $v_0 = \dfrac{1}{2}$.

Q4. Déduire de ce qui précède une expression de v_n en fonction de n.

Q 4| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ou encore $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Q5. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

Q 5| Éléments de réponse

Puisque $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, on a $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie B | Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q6. Démontrer que alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 \times \dfrac{1-3\times 2^n}{1-2^{n+1}}$

Q 6| Éléments de réponse

Par construction : $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$
c'est à dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n\,(u_n - 2) = u_n - 3.$
Par suite : $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n u_n - 2v_n = u_n - 3$
ce qui amène à : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n v_n - u_n = 2v_n - 3$
puis à : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n\,(v_n - 1) = 2v_n - 3$
et finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \dfrac{2v_n - 3}{v_n - 1}$

Pour finalement obtenir que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - 3}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}$

Un calcul direct donne alors que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned}
\frac{2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - 3}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - 1} &= \frac{\dfrac{1}{2^n} - 3}{\dfrac{1}{2^{n+1}} - 1} \\
&= \frac{\dfrac{1 - 3\times 2^n}{2^n}}{\dfrac{1 - 2^{n+1}}{2^{n+1}}} \\
&= \frac{1 - 3\times 2^n}{2^n} \times \frac{2^{n+1}}{1 - 2^{n+1}} \\
&= 2 \times \frac{1 - 3\times 2^n}{1 - 2^{n+1}}
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat attendu.

Q7. Établir que l'on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = 2 - \dfrac{2^{n+1}}{1 - 2^{n+1}}$

Q 7| Éléments de réponse

En remarquant que $3 = 2 + 1$, il vient que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\, u_n &= 2 \times \frac{1 - (2+1)\times 2^n}{1 - 2^{n+1}} \\
&= 2 \times \frac{1 - 2^{n+1} - 2^n}{1 - 2^{n+1}} \\
&= 2\left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2^{n+1}} - \frac{2^n}{1 - 2^{n+1}}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{2^n}{1 - 2^{n+1}}\right) \\
&= 2 - \frac{2^{n+1}}{1 - 2^{n+1}}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

Q8. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle valeur ?

Q 8| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned}
\frac{2^{n+1}}{1 - 2^{n+1}} &= \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}} - 1\right)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{1}{2^{n+1}} - 1}
\end{aligned}$$

Comme $2 > 1$, on a $2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par quotient, on a $\dfrac{1}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et il vient par somme que $\dfrac{1}{2^{n+1}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$

Ainsi, par somme, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.

Problème n° 2 | Recherche du terme général d'une suite

On se propose dans ce problème de déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 &= -\dfrac{1}{2} \\ u_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} &= u_{n+1} + 6u_n + 3 \end{cases}$$

Partie A | Calcul des puissances d'une matrice

Dans tout ce qui suit, on considère les deux matrices A et P de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q9. Calculer $A^2 - A$.

Q 9| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ puis que $A^2 - A = 6\mathrm{I}_2$.

Q10. Montrer que la matrice A est inversible, et en donner son expression en fonction de A et de I_2.

Q 10| Éléments de réponse

Puisque $A^2 - A = 6\mathrm{I}_2$, il vient que $A(A - \mathrm{I}_2) = 6\mathrm{I}_2$ et donc que $A \times \dfrac{1}{6}(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{I}_2$, ce qui assure que A est inversible à droite, donc inversible, et que son inverse A^{-1} est $\dfrac{1}{6}(A - \mathrm{I}_2)$.

Q11. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.

Q 11| Éléments de réponse

Par théorème : $(P \text{ est inversible}) \quad \Leftrightarrow \quad (\det(P) \neq 0)$.

On a clairement ici que :
$$\begin{aligned} \det(P) &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 1 - 1 \times (-2) \\ &= 5 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

ce qui assure que P est inversible, et on a par ailleurs que $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Q12. On désigne par D la matrice $D = P^{-1}AP$. Déterminer D.

Q 12| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Q13. Démontrer par récurrence sur l'entier n que l'on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Q 13| Éléments de réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $\mathcal{P}(n)$:« $A^n = PD^nP^{-1}$ »

Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on sait que $A^0 = \mathrm{I}_2$ et on a clairement que :
$$\begin{aligned} PD^0P^{-1} &= P\mathrm{I}_2P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_2 \end{aligned}$$
ce qui assure que $A^0 = PD^0P^{-1}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Il est clair que $A^{n+1} = A^n \times A$. Donc par hypothèse de récurrence, il vient que $A^{n+1} = PD^nP^{-1}A$.
Or on a $D = P^{-1}AP$, donc $PD = AP$ et par suite $A = PDP^{-1}$, ce qui amène à :
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PDn^nP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de A^n en fonction de n.

Q 14| Éléments de réponse

Il est immédiat, et on pourrait établir ce résultat par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

Par suite :
$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} & (-2)^{n+1} \\ 3^n & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \times 3^{n+1} + 3 \times (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \times 3^n + 3 \times (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Q15. L'expression donnant les coefficients A^n obtenue précédemment est-elle encore valable pour $n = -1$?

Q 15| Éléments de réponse

On a vu que $A^{-1} = \dfrac{1}{6}(A - \mathrm{I}_2)$ c'est à dire que $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$

Par ailleurs, pour $n = -1$, on a :
$$\begin{aligned} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3^{n+1} - (-2)^{n+1} & 2 \times 3^{n+1} + 3 \times (-2)^{n+1} \\ 3^n - (-2)^n & 2 \times 3^n + 3 \times (-2)^n \end{pmatrix} &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
et par suite l'expression de A^n pour $n = -1$ est encore valable.

Partie B | Transformation du problème

Dans tout ce qui suit, on désigne par B la matrice colonne de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donnée par $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne X_n de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ par $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Q16. Déterminer la matrice colonne X_2.

Q 16| Éléments de réponse

Il est clair que $X_2 = \begin{pmatrix} U_3 \\ u_2 \end{pmatrix}$, et compte-tenu de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :
$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + 6u_0 + 3 \\ &= 1 + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \\ &= 1 - 3 + 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

et que l'on a : $$\begin{array}{rcl} u_3 & = & u_2 + 6 \times u_1 + 3 \\ & = & 1 + 6 + 3 \\ & = & 10 \end{array}$$
et par suite que $X_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q17. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\, X_{n+1} = AX_n + B$.

Q 17| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N},\, AX_n + B & = & \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} u_{n+1} + 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} u_{n+1} + 6u_n + 3 \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ & = & X_{n+1} \end{array}$$
ce qui est bien la relation attendue.

Q18. Montrer que l'équation $AY + B = Y$ d'inconnue la matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution L que l'on déterminera.

Q 18| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $(AY + B = Y) \quad \Leftrightarrow \quad ((A - \mathrm{I}_2)\, Y + B = (0))$
Un calcul direct donne que $(A - \mathrm{I}_2)\, Y + B = \begin{pmatrix} 6y + 3 \\ x - y \end{pmatrix}$.
Ainsi, par identification des coefficients, on a :

$$\begin{array}{rcl} (AY + B = Y) & \Leftrightarrow & \begin{cases} 6y + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

et par suite l'équation $AY + B = Y$ admet une unique solution qui est la matrice colonne $L = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Q19. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\, X_n = A^n\,(X_0 - L) + L$.

Q 19| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $X_n = A^n\,(X_0 - L) + L$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Un calcul direct donne que : $$\begin{array}{rcl} A^0\,(X_0 - L)^0 + L & = & \mathrm{I}_3\,(X_0 + L) - L \\ & = & X_0 - L + L \\ & = & X_0 \end{array}$$

ce qui assure que $A^0\,(X_0 - L)^0 + L = X_0$, ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$.

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Par construction, on a $X_{n+1} = AX_n + B$.

Ainsi, par hypothèse de récurrence, il vient que : $$X_{n+1} = A\times\left(A^n\left(X_0-L\right)+L\right)+B = A^{n+1}\left(X_0-L\right)+AL+B \underset{AL+B=L}{=} A^{n+1}\left(X_0-L\right)+L$$

ce qui est donc $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q20. Déduire des questions précédentes que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N},\, u_n=\dfrac{3}{10}\left(3^n-(-2)^n\right)-\dfrac{1}{2}$.

Q 20| Éléments de réponse

On a que $X_n=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}$ et que $X_n=A^n\left(X_0-L\right)+L$. Comme $X_0=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ il vient que :

$$\begin{aligned}
A^n\left(X_0-L\right)+L &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3^{n+1}-(-2)^{n+1} & 2\times3^{n+1}+3\times(-2)^{n+1}\\ 3^n-(-2)^n & 2\times3^n+3\times(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3^{n+1}-(-2)^{n+1} & 2\times3^{n+1}+3\times(-2)^{n+1}\\ 3^n-(-2)^n & 2\times3^n+3\times(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3^{n+2}-3\times(-2)^{n+1}\\ 3^{n+1}-3\times(-2)^n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3^{n+2}-3\times(-2)^{n+1}\\ 3^{n+1}-3\times(-2)^n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{10}\left(3^{n+2}-3\times(-2)^{n+1}\right)-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{10}\left(3^{n+1}-3\times(-2)^n\right)-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{3}{10}\left(3^{n+1}-(-2)^{n+1}\right)-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{10}\left(3^{n}-(-2)^n\right)-\frac{1}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui permet par identification des coefficients d'obtenir que : $\forall n\in\mathbb{N},\, u_n=\dfrac{3}{10}\left(3^n-(-2)^n\right)-\dfrac{1}{2}$.

Problème n° 3 | Suites imbriquées

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premier terme respectif $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$, et par les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}v_n \end{cases}$$

On se propose dans cet exercice de déterminer le terme général des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis d'en déterminer les limites.

Partie A | Étude de la suite de terme général $v_n - u_n$

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_n - u_n$.

Q21. Déterminer les valeurs de w_0 et de w_1.

Q 21| Éléments de réponse

Il est immédiat que $w_0 = 1$.
Par ailleurs, on a : $$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}v_0 = \frac{5}{3}$$
et sur le même principe : $$v_1 = \frac{1}{5}u_0 + \frac{4}{5}v_0 = \frac{9}{5}$$
et finalement, on en déduit par calcul direct que $w_1 = \dfrac{2}{15}$.

Q22. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{15}$.

Q 22| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n - \left(\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n\right) \\ &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n - \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}v_n \\ &= \frac{2}{15}u_n - \frac{2}{15}v_n \\ &= \frac{2}{15}w_n \end{aligned}$$
ce qui assure que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{15}$ et de premier terme $w_0 = 1$.

Q23. Donner alors l'expression du terme général de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Q 23| Éléments de réponse

Il est alors immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(\dfrac{2}{15}\right)^n$.

Q24. Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q 24| Éléments de réponse

Comme $\left|\dfrac{2}{15}\right| < 1$, par théorème, il vient que $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie B | Sens de variation des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$ en fonction de w_n.

Q 25| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n - u_n = \frac{-2}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3}w_n$$
et sur le même principe : $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n - v_n = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5}v_n = -\frac{1}{5}(v_n - u_n) = -\frac{1}{5}w_n$$

Q26. Déduire de ce qui précède le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 26| Éléments de réponse

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ nw_n = \left(\frac{2}{15}\right)^n$
il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geq 0$.
Le sens de variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant donné par le signe des différences $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$.
Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n \leq 0$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

Q27. Justifier alors que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers la même limite que l'on notera ℓ par la suite.

Q 27| Éléments de réponse

Puisque les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de sens de variations opposés et que l'on a $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ces deux suites sont adjacentes. Ainsi, par théorème, elles sont convergentes, et convergent vers la même limite, notée ℓ pour la suite.

Partie C | Recherche de la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = 3u_n + 10v_n$

Q28. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, qu'elle est sa limite ?

Q 28| Éléments de réponse

Par produit et somme, il vient que $3u_n + 10v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 13\ell$, donc la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 13ℓ.

Q29. Démontrer par récurrence que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

Q 29| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considére la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $t_n = 23$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : par construction de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\begin{array}{rcl} t_0 & = & 3\times u_0 + 10\times v_0 \\ & = & 3+20 \\ & = & 23 \end{array}$

et donc on a bien $t_0 = 23$, ce qui est $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Par construction de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1}$

et ainsi par définition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{rcl} t_{n+1} & = & 3\left(\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n\right) + 10\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n\right) \\ & = & u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n \\ & = & 3u_n + 10v_n \\ & = & t_n \\ & \underset{\text{H.R}}{=} & 23 \end{array}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q30. En déduire la valeur de ℓ.

Q 30| Éléments de réponse

La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant constante mais aussi convergente, on a donc par passage à la limite que $13\ell = 23$ ce qui donne $\ell = \dfrac{23}{13}$.

Partie D | Recherche du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q31. Soit $n\in\mathbb{N}$. Résoudre le système linéaire de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \alpha \\ 3 & 10 & \beta \end{array}\right)$ où (α,β) est un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.

Q 31| Éléments de réponse

On effectue un échelonnement réduit en lignes de ce système :

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \alpha \\ 3 & 10 & \beta \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \alpha \\ 0 & 13 & 3\alpha+\beta \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow 13L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} -13 & 0 & 16\alpha+\beta \\ 0 & 13 & 3\alpha+\beta \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{13}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{13}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\dfrac{16\alpha+\beta}{13} \\ 0 & 1 & \dfrac{3\alpha+\beta}{13} \end{array}\right)$$

pour obtenir que, si l'on note (x,y) les solutions de ce dernier : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{16\alpha+\beta}{13} \\ y & = & \dfrac{3\alpha+\beta}{13} \end{array}\right.$

Q32. Déduire de ce qui précède une expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Q 32| Éléments de réponse

D'après les questions précdentes, on a les relations suivantes : $\forall n\in\mathbb{N}, \left\{\begin{array}{rcrcl} -u_n & + & v_n & = & \left(\dfrac{2}{15}\right)^n \\ 3u_n & + & v_n & = & 23 \end{array}\right.$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n, v_n) est solution du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & \alpha \\ 3 & 10 & \beta \end{array}\right)$ avec $\alpha = \left(\dfrac{2}{15}\right)^n$ et $\beta = 23$.

Les calculs précédents donnent que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n &= -\dfrac{16\left(\dfrac{2}{15}\right)^n + 23}{13} \\ v_n &= \dfrac{3\left(\dfrac{2}{15}\right)^n + 23}{13} \end{cases}$

Q33. Retrouver alors la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 33| Éléments de réponse

Puisque $\left|\dfrac{2}{15}\right| < 1$, par théorème, on a que $\left(\dfrac{2}{15}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure par somme et quotient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{23}{13}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{23}{13}$.

Problème 4 | Constante d'Euler

Dans tout cet exercice, on considère la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Partie A | Préliminaire technique

On admet que : $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$.

Q34. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$

Puis en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq h_n$.

Q 34| Éléments de réponse

Il est clair que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k} \in \left]-1;+\infty\right[$

Il vient donc que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

Par sommation de ces inégalités, il vient que : $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

c'est à dire que : $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq h_n$

et donc que : $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leq h_n$

et ainsi par télescopage : $\ln(n+1) - \ln(1) \leq h_n$

ce qui donne bien finalement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq h_n$.

Q35. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Q 35| Éléments de réponse

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Inégalité $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$ **:** on commence par remarquer que : $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

et par suite, d'après l'inégalité admise : $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

Inégalité $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ **:** on commence par remarquer que :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\\ &= -\ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)\\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

Puisque : $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[,\ \ln(1+x) \leq x$

il vient que : $\forall x \in \left]-1;1\right[,\ \ln(1+x) \leq x$

et donc que : $\forall x \in \left]-1;1\right[,\ \ln(1-x) \leq -x$

Ainsi, puisque : $\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{1}{p+1} \in \left]-1;1\right[$

il vient que : $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$

et donc que : $-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n+1}$

et ainsi on a bien : $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

Partie B | Étude de la suite $(h_n)_{n\geq 1}$

Q36. Montrer que la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

Q 36| Éléments de réponse

Le sens de variation de la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ est donné par le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Un calcul direct donne ici que : $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_{n+1} - h_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0$$

ce qui assure que la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

Q37. Étudier la convergence de la suite $(h_n)_{n\geq 1}$.

Q 37| Éléments de réponse

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq h_n$
et que l'on sait que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'après le théorème de minoration, $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

Partie C | Étude de deux suites

Dans tout ce qui suit, on considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = h_n - \ln(n) \text{ et } v_n = h_n - \ln(n+1)$$

Q38. Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$.

Q 38| Éléments de réponse

Sens de variation de $(u_n)_{n\geq 1}$: le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donné par le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - (h_n - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &\leq 0 \text{ d'après la question préliminaire}\end{aligned}$$

Par suite, $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante.

Sens de variation de $(v_n)_{n\geq 1}$: sur le même principe, un calcul direct donne que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}_{\geq 0 \text{ d'après la question préliminaire}}$$

ce qui assure que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

Q39. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_n - v_n$, et en déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite que l'on notera γ.

Q 39| Éléments de réponse

Tout d'abord, un calcul direct donne que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - v_n = h_n - \ln(n) - (h_n - \ln(n+1)) = ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par somme $1+\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et par composition il vient que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, on a $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Finalement, puisque $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes, et donc par théorème, convergent vers la même limite, que l'on note donc γ.

Q40. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq \gamma \leq u_n$.

Q 40| Éléments de réponse

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante et convergente, elle est nécessairement minorée par sa limite γ.
De même, la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ étant croissante et convergente, elle est nécessairement majorée par sa limite γ.
Finalement, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq \gamma \leq u_n$.

Q41. Démontrer que $\frac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Q 41| Éléments de réponse

Par construction de $(u_n)_{n\geq 1}$, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = u_n + \ln(n)$
Ainsi, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \frac{h_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1$
Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$, il vient que $\frac{u_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure par somme que $\frac{h_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Partie D | Étude d'une suite définie par une somme

Dans tout ce qui suit, on considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est donné par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Q42. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = h_{2n} - h_n$.

Q 42| Éléments de réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $S_n = h_{2n} - h_n$ ».
Démontrons par récurrence sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$, il vient que :
$$S_1 = \sum_{k=1}^{2\times 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^{1-1}}{1} + \frac{(-1)^{2-1}}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Par ailleurs : $$\begin{aligned} h_{2\times 1} - h_1 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $S_1 = h_{2\times 1} - h_1$ ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et montrons sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Par définition de $(S_n)_{n\geq 1}$, on a : $$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{(2n+2)-1}}{2n+2} \\ &\underset{\text{H.R.}}{=} h_{2n} - h_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= h_{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} - h_n \\ &= h_{2n+2} - \frac{1}{n+1} - h_n \\ &= h_{2(n+2)} - h_{n+1} \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 est héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q43. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.

Q 43| Éléments de réponse

Par un calcul direct à partir de la relation précédente, il vient que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n &= h_{2n} - h_n \\ &= u_{2n} + \ln(2n) - (u_n + \ln(n)) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln\left(\frac{2n}{n}\right) \\ &= u_{2n} - u_n + \ln(2) \end{aligned}$$

Q44. Démontrer alors que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Q 44| Éléments de réponse

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers γ, il en est de même de toutes ses suites extraites, et donc $u_{2n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par somme que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.