Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question...**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Problème n° 1 | Un peu de technique

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire G.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)(1+t)} & \text{si} \quad t \in [0;1] \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [0;1] \end{cases} \end{array} \right.$$

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité. Dans tout ce qui suit, on désignera alors par X une variable aléatoire de densité f.

Q2. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance, et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-\ln(2)}{\ln(2)}$.

Q3. On rappelle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ t^2 = t(t+1) - t$.
Montrer que Z admet une variance, puis la calculer.

Q4. On désigne par F la fonction de répartition de X. Déterminer l'expression de F sur $\mathbb{R}$.

Problème n° 2 | Étude de la diagonalisabilité d'une famille de matrices

Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on défintí la matrice $M(a,b,c)$ par : $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$

Pour tout (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a,b,c\}$ noté $\operatorname{card}(\{a,b,c\})$ le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.

Par exemple si $a=b=c$ alors $\operatorname{card}(\{a,b,c\}) = 1$, et si $a=b$ et $a \neq c$ alors $\operatorname{card}(\{a,b,c\}) = 2$.

Pour tout (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a,b,c)$ et on souhaite démontrer la propriété suivante :

$$(\star) : \quad (M(a,b,c) \text{ est inversible}) \quad \Leftrightarrow \quad (ab+bc+ac+abc \neq 0)$$

et on admet [1] le résultat suivant pour tout le problème : la matrice $M(a,b,c)$ est diagonalisable.

Dans tout ce problème, on désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on note f l'endomorphisme fde $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M(a,b,c)$, c'est à dire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} = M(a,b,c)$.

Partie A | Quelques généralités

Dans toute cette partie, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est fixé.

Q5. Montrer que la matrice $M(a,b,c)$ ne peut admettre une unique valeur propre.

Q6. En déduit que la matrice $M(a,b,c)$ admet soit deux, soit trois valeurs propres distinctes.

Q7. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.

Q8. En déduire que $M(a,b,c)$ et $M(b,a,c)$ ont les mêmes valeurs propres.

Q9. De la même façon, montrer que les matrices $M(a,b,c)$ et $M(a,c,b)$ ont les mêmes valeurs propres.

1. Il existe un théorème -hors programme en B/L- qui dit qu'une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable

Partie B | Étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $a=b=c=0$ et on note $J=M(a,b,c)$.

Q10. Calculer J^2 et l'exprimer en fonction de J.

Q11. Montrer que les seules valeurs propres possibles de J sont 0 et 3, puis en déduire le spectre de J.

Q12. Déterminer alors une base des sous-espaces propres de J.

Q13. Expliciter alors une matrice P inversible et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $J=PDP^{-1}$.

Partie C | Cas où $\operatorname{card}(\{a,b,c,\})=1$

Dans toute cette partie, a désigne un réel non nul.

Q14. Vérifier que $M(a,a,a)=P\,(a\mathrm{I}_3+D)\,P^{-1}$ où D et P sont définies dans la partie précédente.

Q15. En déduire que la matrice $M(a,a,a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a.

Q16. Vérifier la propriété $(\star)$ pour $M(a,a,a)$.

Partie D | Édude d'un deuxième cas particulier

On suppose dans cette partie uniquement que $a=b=0$ et que $c\neq 0$. On note alors $C=M(0,0,c)$.

Q17. Justifier que 0 est valeur propre de C

Q18. Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence [2] :

$$(CX=\lambda X)\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{rcl} y & = & x\\ z & = & (\lambda-2)\,x\\ \left(\lambda^2-(c+3)\lambda+2c\right)x & = & 0\end{array}\right.$$

Q19. En déduire que : $\quad(\lambda\in\operatorname{sp}(C)$ avec $\lambda\neq 0)\quad\Leftrightarrow\quad\left(\lambda^2-(c+3)\lambda+2c=0\right)$

Q20. Montrer que C admet trois valeurs propres distinctes.

Partie E | Cas où $\operatorname{card}(\{a,b,c\})=2$

Dans cette partie, on considère $(a,c)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\neq c$.

Q21. Exprimer $M(a,a,c)$ comme combinaison linéaire de I_3 et de $M(0,0,c-a)$.

Q22. En déduire que la matrice $M(a,a,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Q23. Vérifier la propriété $(\star)$ pour la matrice $M(a,a,c)$.

Q24. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{card}(\{a,b,c,\})=2$.
Montrer que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété $(\star)$ dans ce cas.

2. Là je vous invite plutôt à voir y et z comme inconnues principales et x comme inconnue secondaire dans la résolution du système correspondant, et pour ce faire, de permuter dans les équations les différentes inconnues

Partie F | Cas où $\operatorname{card}(\{a,b,c\}) = 3$

Dans toute cette partie (a,b,c) désigne un élément de $\mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$ et on désigne par g la fonction définie par :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} \end{array} \right.$$

Q25. Montrer que g est une fonction décroissante sur chacun des intervalles définissant son ensemble de définition.

Q26. Déterminer les limites en $+\infty$, ∞ et en a de g, puis construire le tableau des variations de g sur sont ensemble de définition.

Q27. En déduire que l'équation $g(x) = 1$ admet exactement trois solutions distinctes λ_1, λ_2, λ_3 vérifiant $a < \lambda_1 < \lambda_2 \lambda 3 < b$.

Q28. Soit $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. On note X_λ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donnée par : $X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda - a} \\ \dfrac{1}{\lambda - b} \\ \dfrac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix}$.

Montrer que X est un vecteur propre de la matrice $M(a,b,c)$ associée à la valeur propre λ.

Q29. En déduire que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Q30. On revient au cas plus général en considérant $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ quelconque tel que $\operatorname{card}(\{a,b,c,\}) = 3$
Montrer que $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes, puis vérifier que $M(a,b,c)$ satisfait à $(\star)$

Partie G | Étude du troisième cas particulier

Dans cette partie, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q31. Montrer que la matrice A est inversible.

Q32. On désigne par A la plus grande des valeurs propres de A. Montrer que $4 < \alpha < 5$.

Problème n° 3 | Digressions autour d'une famille de variables aléatoires de Bernoulli

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire G.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ telles que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i avec $0 < p_i < 1$.

On suppose par ailleurs que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

Partie A | Quelques résultats sur le couple (X_i, X_j)

Q33. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, rappeler les valeurs respectives de $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathbb{V}(X_i)$.

Q34. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Q35. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!]$ avec $i \neq j$, on considère la variable aléatoire $X_i X_j$.
Quelles sont les valeurs prises par $X_i X_j$? Quelle est la loi de $X_i X_j$? En déduire que $\mathbb{E}(X_i X_j) = 0$.

Partie B | Matrice de covariance

Pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!]$, on note $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ la covariance des deux variables aléatoires X_i et X_j. On désigne alors par $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!],\ a_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Q36. Montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!],\ a_{i,j} = \begin{cases} -p_i p_j & \text{si } i \neq j \\ p_i(1-p_i) & \text{si } i = j \end{cases}$

Q37. Soit U la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer le produit AU.

Q38. La matrice A est-elle inversible ?

Partie C | Étude d'une inégalité

Soient $x(1,n)$ et $(y_1)_{1\geq n}$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tel que $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

On considère alors le polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ Q(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i t + y_i)^2$

Q39. En considérant le signe du polynôme Q, établir l'inégalité suivante : $(\star)$: $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$

Q40. Dans quel cas l'inégalité $(\star)$ est-elle un égalité ?

Partie D | Étude d'une autre variable aléatoire

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

On désigne alors par Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$.

Q41. Quelle relation doit satisfaire $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour que $\mathbb{E}(Z_n) = 1$.

Q42. On rappelle que : $\mathbb{V}(Z_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \alpha_i \alpha_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

On suppose dans cette question que $\mathbb{E}(Z_n) = 1$. Établir que : $\mathbb{V}(Z_n) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 p_i\right) - 1$

puis justifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 p_i \geq 1$.

Q43. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on pose $x_i = \sqrt{p_i}$ et $y_i = \alpha_i \sqrt{p_i}$.
Montrer qu'il existe un unique élément $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{R}^n$ que l'on déterminera, qui vérifie les deux conditions $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$ minimale.

Partie E | Étude d'une autre famille de variables aléatoires

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère les n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i = 1$;
- pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ les variables X_i et Y_i suivent la même loi ;
- pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!]$, les variables aléatoires X_i et Y_j sont indépendantes

On désigne alors par T_n la variable aléatoire définie par : $T_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{(X_i - Y_i)^2}{p_i(1-p_i)}$.

Q44. Déterminer la loi de T_n.

Q45. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$.