Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Réaliser l'entête de votre devoir en respectant les éléments suivants : inscrire en haut à gauche de la première copie double, vos nom (en majuscules et en rouge) et prénom (en écriture spéculaire et en bleu) tels qu'ils figurent sur votre dossier d'inscription en commençant au plus à 1 cm du bord gauche de la feuille et au plus à 3 cm du bord supérieur de la feuille, puis au même niveau sur la partie droite de la page, inscrire la date du devoir au format JJ-MM-AAAA ; en sautant une ligne, sous votre nom, inscrire « CPGE-BL 1eannée » ; en laissant un espacement d'environ 2 cm par rapport à la dernière ligne écrite, inscrire en toutes lettres, et en respectant la casse, « Devoir Surveillé n° 14 » au centre de la ligne ; pour finir, laisser un espacement d'environ 2 cm par rapport à cette dernière ligne, tirer un trait horizontal sur la totalité de la largeur de la page, dessiner sous ce trait un lapin, tourner ensuite la page, et commencer par le premier problème ou exercice en commençant en haut de la page.

Problème n° 1 | Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

Partie A | Étude d'un premier sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

Dans tout ce qui suit, u et v désignent deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{R}^3$.
On désigne par F_1 le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ (x+y+z+t)u + (x+t)v = \overrightarrow{0}\right\}$$

Q2. Le vecteur $e_0 = (2,-1,1,-2)$ appartient-il à F_1 ?

Q3. Déterminer un couple de réels (y,t) tel que $f_0 = (1,y,1,t)$ appartienne à F_1.

Q4. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Q5. La famille $\mathcal{F}_0$ formée des deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ? Justifier votre réponse.

Q6. Montrer alors que : $(u = (x,y,z,t) \in F_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x \qquad\quad + t = 0 \end{cases}$.

Q7. Déterminer les solutions du système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x \qquad\quad + t = 0 \end{cases}$.

Q8. Déduire des questions précédentes deux vecteurs e_1 et e_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $F_1 = \text{Vect}\,(e_1, e_2)$.

Partie B | Étude d'un deuxième sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

On désigne par F_2 le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x-y+z=0 \text{ et } y+t=0\right\}$$

Q9. Montrer que les vecteurs $g_1 = (1,1,0,-1)$ et $g_2 = (-1,0,1,0)$ appartiennent à F_2.

Q10. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer les équations de compatibilité du système de repésentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ -1 & 0 & t \end{array}\right)$.

Q11. Déduire de ce qui précède que $F_2 = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2)$.

Q12. F_2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?

Partie C | Décomposition de $\mathbb{R}^4$

On désigne par $\mathcal{G}$ la famille formée des vecteurs $u_1 = (0, 1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0, -1)$, g_1 et g_2.

Q13. La famille $\mathcal{G}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.

Q14. La famille $\mathcal{G}$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.

Q15. Montrer que tout vecteur $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

Problème n° 2 | Puissances d'une famille de matrices

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, on désigne par $M(a)$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.
On se propose dans cet exercice de déterminer une expression de $(M(a))^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Partie A | Recherche des matrices $M(a)$ inversibles

Q16. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $M(a) \times M(b) = M(a + b - 2ab)$.

Q17. Explicitez la matrice $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$, puis en étudier l'inversibilité.

Q18. Montrer que la matrice $M(a)$ est inversible si, et seulement si, $a \neq \dfrac{1}{2}$.

Q19. Pour $a \neq \dfrac{1}{2}$, déterminer en fonction de a, le réel b tel que $M(b) = (M(a))^{-1}$.

Q20. Déterminer l'unique réel non nul noté a_0 tel que $(M(a_0))^2 = M(a_0)$.

Partie B | Calcul des puissances de $M(a)$

On définit les matrices P et Q de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $P = M(a_0)$ et $Q = \mathrm{I}_2 - P$.

Q21. Donner l'expression de P^2, PQ, QP et Q^2 en fonction des matrices P, Q ou de la matrice nulle.

Q22. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de a le réel α tel que $M(a) = P + \alpha Q$.

Q23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de $(M(a))^n$ en fonction de P, Q, α et n.

Q24. Expliciter alors la matrice $(M(a))^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Problème n° 3 | Racine carrée de matrices

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On se propose dans ce problème de déterminer le(s) matrice(s) $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^2 = A$.

Partie A | Un premier résultat

Q25. Déterminer les solutions de l'équation $(\star)$ d'inconnue λ suivante : $(\star)$: $\quad \lambda^2 - \mathrm{tr}\,(A)\lambda + \det(A) = 0$

Q26. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette question que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible.
Montrer que λ est solution de $(\star)$.

Q27. Montrer que si λ est solution de $(\star)$, alors la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible.

Partie B | Transformation du problème

Q28. Déterminer toutes les matrices colonnes $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = X$.

Q29. On considère la matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que P est inversible et expliciter la matrice P^{-1}.

Q30. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale notée D par la suite.

Q31. Pour $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque, on note $\Delta = P^{-1}MP$. Établir que :

$$\left(M^2 = A\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\Delta^2 = D\right)$$

Partie C | Résolution de l'équation $M^2 = A$

Q32. Dans cette question Δ désigne une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$.
Montrer que $\Delta D = D\Delta$ puis en déduire que Δ est une matrice diagonale.

Q33. Résoudre l'équation $\Delta^2 = D$ d'inconnue la matrice $\Delta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q34. Déterminer toutes les solutions de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue la matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Problème n° 4 | Inverse généralisée ou pseudo-inverse d'une matrice

Dans tout ce qui suit n désigne un entier naturel non nul.

On dit que la matrice $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ lorsque les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$(\star_1) : \; AUA = A \quad (\star_2) : \; UAU = U \quad (\star 3) : \; UA = AU$$

Le but de ce problème est de caractériser l'existence d'un pseudo-inverse pour une matrice carrée donnée et d'obtenir une méthode de calcul lorsqu'il existe.

Partie A | Résultats préliminaires

Q35. Soit P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P^{-1} est un pseudo-inverse de P.

Q36. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet un pseudo-inverse que l'on note U.
$P^{-1}UP$ est-il un pseudo-inverse de $P^{-1}AP$?

Partie B | Étude d'un exemple

Dans cette partie, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Q37. Quel est le rang de A ? La matrice A est-elle inversible ?

Q38. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Effectuer le produit PQ. En déduire que P et inversible et expliciter alors P^{-1}.

Q39. Montrez que la matrice $A' = P^{-1}AP$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ et à déterminer.

Q40. On note $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ a été déterminé à la question précédente.

Justifier que A_1 est inversible et expliciter les quatre coefficients α', β', γ', δ' de $(A_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$.

Q41. Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & 0 \\ \gamma' & \delta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un pseudo-inverse de la matrice A'.

Q42. Déterminer alors un pseudo-inverse U de la matrice A que l'on exprimera en fonction de matrices définies dans les questions précédentes.

Partie C | Unicité du pseudo-inverse

Dans cette partie A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'objet de ce qui suit est de démontrer que si A admet un pseudo-inverse, alors ce dernier est unique.

On suppose que A admet deux pseudo-inverses U et U'.

Q43. En calcul le produit $AUAU'$ de deux manières différentes, montrer que $UA = AU'$.

Q44. En déduire que $U = U'$.