

Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.

Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.

Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Problème n° 1 | Un peu de technique

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire G .

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{\ln(2)(1+t)} & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0; 1] \end{cases} \end{cases}$$

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité. Dans tout ce qui suit, on désignera alors par X une variable aléatoire de densité f .

Q 1 | Éléments de réponse

f est positive sur \mathbb{R} : en effet on sait que $\ln(2) > 0$ et que pour tout $t \in [0; 1]$, $1 + t > 0$.

f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en 1 : en effet, par opérations sur les fonctions continues, puisque $t \mapsto 1 + t$ ne s'annule pas sur $[0; 1]$, on a clairement que f est continue sur $[0; 1]$, sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et de somme 1 : en effet, compte-tenu de l'expression de f , s'intéresser à la convergence et à la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$, revient à s'intéresser à la convergence et à la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{\ln(2)(1+t)} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(2)(1+t)}$ étant continue sur $[0; 1]$, $\int_0^1 \frac{1}{\ln(2)(1+t)} dt$ est un intégrale définie, donc convergente.

Par ailleurs, on a par primitivation directe que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\ln(2)(1+t)} dt &= \left[\frac{1}{\ln(2)} \ln(1+x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \ln(2) - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ce qui assure donc que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

Q2. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance, et que $\mathbb{E}(X) = \frac{1 - \ln(2)}{\ln(2)}$.

Q 2 | Éléments de réponse

Par définition, $\mathbb{E}(X)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est absolument convergente ce qui compte-tenu de l'expression de f et de sa positivité, revient à étudier la convergence et rechercher la valeur de $\int_0^1 \frac{t}{\ln(2)(1+t)} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{t}{\ln(2)(1+t)}$ étant continue sur $[0; 1]$, $\int_0^1 \frac{t}{\ln(2)(1+t)} dt$ est un intégrale définie, donc convergente.

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{t}{\ln(2)(1+t)} dt &= \int_0^1 \frac{1}{\ln(2)} \times \frac{t+1-1}{1+t} dt \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} \left(\int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} \left([t]_0^1 - [\ln(1+t)]_0^1 \right) \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} (1 - \ln(2)) \\
 &= \frac{1 - \ln(2)}{\ln(2)} \\
 &= \frac{2 \ln(2) - 1}{2 \ln(2)}
 \end{aligned}$$

Q3. On rappelle que : $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 = t(t+1) - t$.
Montrer que Z admet une variance, puis la calculer.

Q 3 | Éléments de réponse

On sait que si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, alors X admet une variance (et une espérance) et que dans ce cas $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

D'après le théorème du transfert $\mathbb{E}(X^2)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ est absolument convergente ce qui compte-tenu de

l'expression de f et de sa positivité, revient à étudier la convergence et rechercher la valeur de $\int_0^1 \frac{t^2}{\ln(2)(1+t)} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{\ln(2)(1+t)}$ étant continue sur $[0; 1]$, $\int_0^1 \frac{t^2}{\ln(2)(1+t)} dt$ est un intégrale définie, donc convergente.

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{t^2}{\ln(2)(1+t)} dt &= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{t(t+1) - t}{t+1} dt \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \left(t - \frac{t}{t+1} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} \left(\int_0^1 t dt - \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt \right) \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 t dt - \mathbb{E}(X) \\
 &= \frac{1}{\ln(2)} [t]_0^1 - \mathbb{E}(X) \\
 &= \frac{1}{2 \ln(2)} - \mathbb{E}(X)
 \end{aligned}$$

et par suite, il vient que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(X) &= \frac{1}{2 \ln(2)} - \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 \\
 &= \frac{2 \ln(2) - 1}{2 \ln(2)} - \left(\frac{1 - \ln(2)}{\ln(2)} \right)^2 \\
 &= \frac{\ln(2) - 2 \ln(2) + 2 (\ln(2))^2 - 2 + 4 \ln(2) - 2 (\ln(2))^2}{2 (\ln(2))^2} \\
 &= \frac{3 \ln(2) - (\ln(2))^2}{2 (\ln(2))^2} \\
 &= \frac{3 \ln(2) - 2}{2 (\ln(2))^2}
 \end{aligned}$$

Q4. On désigne par F la fonction de répartition de X . Déterminer l'expression de F sur \mathbb{R} .

Q 4 | Éléments de réponse

Par définition : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Si $x < 0$: par définition de f , on a : $F(x) = 0$.

Si $0 \leq x \leq 1$: par définition de f , on a :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln(2)(1+t)} dt$$

$$= \left[\frac{1}{\ln(2)} \ln(1+t) \right]_0^x$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{\ln(2)}$$

Si $1 < x$: par définition de f , on a :

$$F(x) = \int_0^1 f(t) dt$$

$$= 1$$

Ainsi, on a donc que :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{\ln(2)} & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Problème n° 2 | Étude de la diagonalisabilité d'une famille de matrices

Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a, b, c) de \mathbb{R}^3 , on appelle cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$ noté $\text{card}(\{a, b, c\})$ le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.

Par exemple si $a = b = c$ alors $\text{card}(\{a, b, c\}) = 1$, et si $a = b$ et $a \neq c$ alors $\text{card}(\{a, b, c\}) = 2$.

Pour tout (a, b, c) de \mathbb{R}^3 , on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite démontrer la propriété suivante :

$$(\star) : (M(a, b, c) \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (ab + bc + ac + abc \neq 0)$$

et on admet¹ le résultat suivant pour tout le problème : la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

Dans tout ce problème, on désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et on note f l'endomorphisme fde \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $M(a, b, c)$, c'est à dire $\text{Mat}_{\mathcal{B}} = M(a, b, c)$.

Partie A | Quelques généralités

Dans toute cette partie, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est fixé.

Q5. Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ ne peut admettre une unique valeur propre.

Q 5 | Éléments de réponse

Si tel était le cas, en notant λ cette dernière, comme M est diagonalisable, on aurait nécessairement que $M(a, b, c) = PDP^{-1}$ avec $D = \lambda I_3$ et donc que $M = \lambda I_3$ ce qui n'est clairement pas le cas.

Q6. En déduit que la matrice $M(a, b, c)$ admet soit deux, soit trois valeurs propres distinctes.

Q 6 | Éléments de réponse

Comme $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on sait que M possède au plus 3 valeurs propres distinctes.

Comme elle ne peut en avoir une seule d'après la question précédente, soit elle en a exactement 2, soit exactement 3.

Q7. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.

Q 7 | Éléments de réponse

Par construction de $M(a, b, c)$ comme matrice de f dans \mathcal{B} , on a :

- $f(e_2) = (1+b)e_2 + e_1 + e_3$
- $f(e_1) = e_2 + (1+a)e_1 + e_3$

1. Il existe un théorème -hors programme en B/L- qui dit qu'une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable

$$\bullet f(e_3) = e_2 + e_1 + (1+c)e_3$$

$$\text{et donc il vient que : } \text{Mat}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Q8. En déduire que $M(a, b, c)$ et $M(b, a, c)$ ont les mêmes valeurs propres.

Q 8 | Éléments de réponse

$M(a, b, c)$ et $M(b, a, c)$ représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles possèdent les mêmes valeurs propres.

Q9. De la même façon, montrer que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(a, c, b)$ ont les mêmes valeurs propres.

Q 9 | Éléments de réponse

Il suffit de considérer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'' = (e_1, e_3, e_2)$ et reprendre le même raisonnement.

Partie B | Étude d'un premier cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(a, b, c)$.

Q10. Calculer J^2 et l'exprimer en fonction de J .

Q 10 | Éléments de réponse

Un calcul direct donne que $J^2 = 3J$.

Q11. Montrer que les seules valeurs propres possibles de J sont 0 et 3, puis en déduire le spectre de J .

Q 11 | Éléments de réponse

Puisque $J^2 = 3J$ on a donc que $J^2 - 3J = (0)$.

Soit alors λ une valeur propre de J et X un vecteur propre non nul associé à J . On a donc $JX = \lambda X$ et donc $J^2X = \lambda^2 X$. Il vient alors que $J^2X - 3JX = (0)$ et donc que $\lambda(\lambda - 3)X = (0)$ et comme $X \neq (0)$ que $\lambda \in \{0, 3\}$ ce qui signifie que $\text{sp}(J) \subset \{0, 3\}$.

Or on a vu que J est ne peut pas posséder une seule valeur propre, donc on a exactement $\text{sp}(J) = \{0, 3\}$.

Q12. Déterminer alors une base des sous-espaces propres de J .

Q 12 | Éléments de réponse

Étude de $E_0(J)$: il est immédiat que $\text{rg}(J) = 1$, ce qui assure que $\dim(E_0(J)) = 2$ par le théorème du rang.

Il est immédiat que $J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que $J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ce qui assure que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $E_0(J)$, non nuls et non colinéaires, donc formant une famille libre de $E_0(J)$ qui est de dimension 2. Donc par théorème, ces deux vecteurs en forment une base.

Étude de $E_3(J)$: comme J est diagonalisable, on sait que $\dim(E_0(J)) + \dim(E_3(J)) = 3$ donc $E_3(J)$ est une droite vectorielle. Par ailleurs, il est immédiat que $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3(J)$ et par suite que $E_3(J)$ est

engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q13. Expliciter alors une matrice P inversible et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $J = PDP^{-1}$.

Q 13 | Éléments de réponse

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on sait que P est inversible car formée à partir d'une base de vecteurs propres de J et en posant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien que $J = PDP^{-1}$.

Partie C | Cas où $\text{card}(\{a, b, c\}) = 1$

Dans toute cette partie, a désigne un réel non nul.

Q14. Vérifier que $M(a, a, a) = P(aI_3 + D)P^{-1}$ où D et P sont définies dans la partie précédente.

Q 14 | Éléments de réponse

Il est clair que $M = aI_3 + J$. Or en remarquant que $I_3 = PI_3P^{-1}$ et en utilisant que $J = PDP^{-1}$, il vient que $M = P(aI_3 + D)P^{-1}$.

Q15. En déduire que la matrice $M(a, a, a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a .

Q 15 | Éléments de réponse

Il est immédiat que $aI_3 + J = \begin{pmatrix} a+3 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Ainsi, $M(a, a, a)$ est semblable à la matrice diagonale $aI_3 + J$ qui donne que $\text{sp}M(a, a, a) = \{a, a+3\}$.

Q16. Vérifier la propriété (\star) pour $M(a, a, a)$.

Q 16 | Éléments de réponse

On sait que : $(M(a, a, a) \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (0 \notin \text{sp}M(a, a, a))$
 Ainsi : $(M(a, a, a) \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ et } a+3 \neq 0)$
 La relation (\star) s'écrit pour $M(a, a, a)$ ainsi : $ab + bc + ac + abc = a^2(3+a)$
 et cette dernière quantité ne peut s'annuler que pour $a = 0$ ou $a+3 = 0$.
 et on a donc bien : $(M(a, a, a) \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (ab + bc + ac + abc \neq 0)$

Partie D | Étude d'un deuxième cas particulier

On suppose dans cette partie uniquement que $a = b = 0$ et que $c \neq 0$. On note alors $C = M(0, 0, c)$.

Q17. Justifier que 0 est valeur propre de C

Q 17 | Éléments de réponse

Par construction $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$ donc est clairement non inversible puisque ces deux premières colonnes sont égales.
 Ainsi 0 est valeur propre de C .

Q18. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence² :

$$(CX = \lambda X) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = (\lambda - 2)x \\ (\lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c)x = 0 \end{cases}$$

Q 18| Éléments de réponse

Il est direct que : $(CX = \lambda X) \Leftrightarrow (CX - \lambda X = (0))$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (z, y, x) \text{ est solution du} \\ \text{système de représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1+c-\lambda & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{pmatrix}$$

Un échelonnement en lignes de ce dernier donne que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1+c-\lambda & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (1+c-\lambda)L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+c-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-c & -\lambda^2 + \lambda(2+c) - c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{\lambda}L_2]{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+c-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-c & -\lambda^2 + \lambda(2+c) - c & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda-c)L_2]{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+c-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + \lambda(3+c) - 2c & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui amène alors à : $(CX = \lambda X) \Leftrightarrow (CX - \lambda X = (0))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -y - (1+c-\lambda)x \\ y = x \\ (\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c)x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = (\lambda-2)x \\ y = x \\ (\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c)x = 0 \end{cases}$$

Q19. En déduire que : $(\lambda \in \text{sp}(C) \text{ avec } \lambda \neq 0) \Leftrightarrow (\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c = 0)$

Q 19| Éléments de réponse

On sait que : $(CX = \lambda X) \Leftrightarrow (CX - \lambda X = (0))$ Ainsi, si $x = 0$, on a alors que $X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = (\lambda-2)x \\ y = x \\ (\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c)x = 0 \end{cases}$$

ce qui n'est pas possible pour un vecteur propre. Donc nécessaire $x \neq 0$ et ainsi $\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c = 0$.
Réciproquement si $\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c = 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $CX = \lambda X$.

Q20. Montrer que C admet trois valeurs propres distinctes.

Q 20| Éléments de réponse

On sait déjà que 0 est valeur propre de C .

Par ce qui précède les valeurs propres non nulles de C sont solutions de l'équation de degré 2 : $\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c = 0$

Le discriminant de cette dernière est $\Delta = c^2 - 2c + 9$ qui est lui même un polynôme de degré 2 de discriminant égal à -32 , donc qui assure que Δ est de signe constant sur \mathbb{R} donc ici strictement positif.

Par suite l'équation $\lambda^2 - (c+3)\lambda + 2c = 0$ admet exactement deux solutions et C admet alors exactement trois valeurs propres.

2. Là je vous invite plutôt à voir y et z comme inconnues principales et x comme inconnue secondaire dans la résolution du système correspondant, et pour ce faire, de permuter dans les équations les différentes inconnues

Partie E | Cas où $\text{card}(\{a, b, c\}) = 2$

Dans cette partie, on considère $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.

Q21. Exprimer $M(a, a, c)$ comme combinaison linéaire de I_3 et de $M(0, 0, c - a)$.

Q 21 | Éléments de réponse

Il est immédiat que $M(a, a, c) = aI_3 + M(0, 0, c - a)$.

Q22. En déduire que la matrice $M(a, a, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Q 22 | Éléments de réponse

D'après la partie précédente, la matrice $M(0, 0, c - a)$ admet trois valeurs propres distinctes et donc est semblable à une matrice diagonale D dont tous les termes diagonaux sont distincts deux à deux. En écrivant que $M(0, 0, c - a) = PDP^{-1}$, sur le même principe que dans les parties précédentes, on pourra écrire que $M(a, a, c) = P(aI_3 + D)P^{-1}$ et comme $aI_3 + D$ est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont les valeurs propres de $M(a, a, c)$ et qui sont tous distincts deux à deux, on en déduit que $M(a, a, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Q23. Vérifier la propriété (\star) pour la matrice $M(a, a, c)$.

Q 23 | Éléments de réponse

En explicitant la matrice $aI_3 + D$ il vient que $\text{sp}M(a, a, c) = \{a, a + \mu_1, a + \mu_2\}$ où μ_1 et μ_2 sont les solutions de l'équation $\lambda^2 - (c + 3)\lambda + 2c = 0$.

Par ailleurs, puisque : $(M(a, a, c) \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (0 \notin \text{sp}(M(a, a, c)))$

il vient que : $(M(a, a, c) \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ et } -a \notin \{\mu_1, \mu_2\})$

ce qui signifie que : $(M(a, a, c) \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ et } -a \notin \text{sp}(M(0, 0, c - a)))$

Or par ce qui précède : $(\lambda \in \text{sp}(M(0, 0, c - a)) \text{ avec } \lambda \neq 0) \Leftrightarrow (\lambda^2 - ((c - a) + 3)\lambda + 2(c - a) = 0)$

et donc que : $(-a \notin \text{sp}(M(0, 0, c - a)) \text{ avec } a \neq 0) \Leftrightarrow (ac + a + 2c = 0)$

Le membre de gauche de la relation (\star) s'écrit : $ab + bc + ac + abc = a(a + 2c + ac)$

Ainsi, on a : $(ab + bc + ac + abc \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ et } a + 2c + ac \neq 0)$

ce qui amène à : $(ab + bc + ac + abc \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ et } -a \notin \text{sp}(M(0, 0, c - a)))$

et donc que : $(ab + bc + ac + abc \neq 0) \Leftrightarrow (M \text{ est inversible})$

Q24. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{card}(\{a, b, c\}) = 2$.

Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété (\star) dans ce cas.

Q 24 | Éléments de réponse

La matrice $M(a, b, c)$ est donc dans ce cas de la forme $M(x, x, y)$ ou $M(x, y, x)$ ou $M(x, x, y)$.

Compte-tenu de ce qui précède les trois matrices $M(x, x, y)$, $M(x, y, x)$ et $M(x, x, y)$ ont les mêmes valeurs propres, et par suite, elles possèdent toutes les trois, trois valeurs propres distinctes.

Comme deux des réels a, b et c sont égaux, on a par définition de x et z que $abc = x^2z$ et que $ab + bc + ac = x^2 + x^2 + xz$.

On a donc : $(M(a, b, c) \text{ inversible}) \Leftrightarrow (0 \notin \text{sp}(M(a, b, c)))$
 $\Leftrightarrow (0 \notin \text{sp}(M(x, x, z)))$
 $\Leftrightarrow (x^2 + x^2 + xz + x^2z \neq 0)$
 $\Leftrightarrow (abc + bc + ac + abc = 0)$

ce qui est bien (\star) .

Partie F | Cas où $\text{card}(\{a, b, c\}) = 3$

Dans toute cette partie (a, b, c) désigne un élément de \mathbb{R}^3 tel que $a < b < c$ et on désigne par g la fonction définie par :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} \end{cases}$$

Q25. Montrer que g est une fonction décroissante sur chacun des intervalles définissant son ensemble de définition.

Q 25| Éléments de réponse

Il est immédiat que la fonction g est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}, g(x) = \underbrace{-\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} - \frac{1}{(x-c)^2}}_{<0}$$

ce qui assure la décroissance de g sur chacun des intervalles définissant son ensemble de définition.

Q26. Déterminer les limites en $+\infty$, $-\infty$ et en a de g , puis construire le tableau des variations de g sur son ensemble de définition.

Q 26| Éléments de réponse

Il est immédiat que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

Par ailleurs puisque $x - a \xrightarrow{x \rightarrow a^-} 0^-$ et $x - a \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 0^+$, il vient que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$, avec des limites équivalentes en b et c .

On obtient alors que :

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		-	-	-	-
Variations de g	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

Q27. En déduire que l'équation $g(x) = 1$ admet exactement trois solutions distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vérifiant $a < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < b$.

Q 27| Éléments de réponse

Compte-tenu des variations de g , l'équation $g(x) = 1$ ne peut avoir de solutions sur l'intervalle $]-\infty; a[$.

Par contre, sur chacun des intervalles $]a; b[$, $]b; c[$ et $]c; +\infty[$:

- la fonction g y est continue ;
- la fonction g y est strictement monotone ;
- 1 appartient à l'ensemble des valeurs prises par g sur cet intervalle

donc par le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction strictement monotone, l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle considéré.

Par suite l'équation $g(x) = 1$ admet exactement trois solutions distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vérifiant $a < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < b$ par construction.

Q28. Soit $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. On note X_λ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donnée par : $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\lambda - a} \\ \frac{1}{\lambda - b} \\ \frac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix}$.

Montrer que X est un vecteur propre de la matrice $M(a, b, c)$ associée à la valeur propre λ .

Q 28| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que : $M(a, b, c)X_\lambda = \begin{pmatrix} 1+a \\ \frac{1}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} \\ \frac{1}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} \\ \frac{1}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix}$

Or comme λ est tel que $g(\lambda) = 1$, il vient que $\frac{1}{\lambda-a} + \frac{1}{\lambda-b} + \frac{1}{\lambda-c} = 1$ ce qui donne que : $M(a, b, c)X_\lambda =$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{\lambda - a} \\ 1 + \frac{b}{\lambda - b} \\ 1 + \frac{c}{\lambda - c} \end{pmatrix} \text{ et donc que } MX_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{\lambda - a}{\lambda} \\ \frac{\lambda - b}{\lambda - c} \end{pmatrix} \text{ et donc que } M(a, b, c)X = \lambda X_\lambda$$

ce qui assure que X_λ est bien un vecteur propre de $M(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ .

Q29. En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Q 29 | Éléments de réponse

On sait que $M(a, b, c)$ admet au plus trois valeurs propres puisque $M(a, b, c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on vient d'en obtenir trois par la question précédente. Donc $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

Q30. On revient au cas plus général en considérant $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ quelconque tel que $\text{card}(\{a, b, c\}) = 3$. Montrer que $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes, puis vérifier que $M(a, b, c)$ satisfait à (\star)

Q 30 | Éléments de réponse

On passe du cas $M(a, b, c)$ avec $a < b < c$ au cas général $M(a, b, c)$ comme précédemment par permutation, ce qui permet d'obtenir 3 valeurs propres distinctes.

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs : } (M(a, b, c) \text{ inversible}) &\Leftrightarrow (0 \notin \text{sp}(M(a, b, c))) \\ &\Leftrightarrow (0 \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}) \\ &\Leftrightarrow (g(0) \neq 1) \end{aligned}$$

et comme $g(0) = -\frac{bc + ac + ab}{abc}$ on en déduit que $ab + ac + bc + abc \neq 0$ comme attendu.

Partie G | Étude du troisième cas particulier

Dans cette partie, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q31. Montrer que la matrice A est inversible.

Q 31 | Éléments de réponse

En remarquant que $A = M(0, 1, 2)$ et en appliquant le résultat de partie précédente, comme $0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 1 \times 2 = 2 \neq 0$, on sait que A est inversible.

Q32. On désigne par λ la plus grande des valeurs propres de A . Montrer que $4 < \lambda < 5$.

Q 32 | Éléments de réponse

On reprend l'étude la fonction g dans le cas où $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$ pour obtenir :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		-	-	-	-
Variations de g	0 ↘	$+\infty$ ↘	$+\infty$ ↘	$+\infty$ ↘	0

On a donc que $\lambda > 2$. Par ailleurs, $g(4) = \frac{13}{12} > 1$ et $g(5) = \frac{47}{60} < 1$ donc comme sur $]2; +\infty[$, g est décroissante on

trouve que $g(4) > g(\alpha) > g(5)$ ce qui assure que $4 < \alpha < 5$.

Problème n° 3 | Digressions autour d'une famille de variables aléatoires de Bernoulli

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire G .

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n telles que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i avec $0 < p_i < 1$.

On suppose par ailleurs que $\sum_{i=1}^n X_i = 1$.

Partie A | Quelques résultats sur le couple (X_i, X_j)

Q33. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, rappeler les valeurs respectives de $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathbb{V}(X_i)$.

Q 33 | Éléments de réponse

X_i suivant une loi de Bernoulli, on sait que $\mathbb{E}(X_i) = p_i$ et $\mathbb{V}(X_i) = p_i(1 - p_i)$.

Q34. Montrer que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Q 34 | Éléments de réponse

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$.

Comme $\sum_{i=1}^n X_i = 1$, on a donc que $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 1$ et comme $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i$, il vient que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Q35. Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $i \neq j$, on considère la variable aléatoire $X_i X_j$. Quelles sont les valeurs prises par $X_i X_j$? Quelle est la loi de $X_i X_j$? En déduire que $\mathbb{E}(X_i X_j) = 0$.

Q 35 | Éléments de réponse

A priori $X_i X_j(\Omega) \subset \{0, 1\}$. Comme $\sum_{i=1}^n X_i = 1$, il ne peut y avoir en même temps $X_i = 1$ et $X_j = 1$, donc $X_i X_j(\Omega) = \{0\}$ ce qui signifie que $X_i X_j$ est la variable aléatoire certaine égale à 0, et donc $\mathbb{E}(X_i X_j) = 0$.

Partie B | Matrice de covariance

Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $\text{Cov}(X_i, X_j)$ la covariance des deux variables aléatoires X_i et X_j . On désigne alors par $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Q36. Montrer que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,j} = \begin{cases} -p_i p_j & \text{si } i \neq j \\ p_i(1 - p_i) & \text{si } i = j \end{cases}$

Q 36 | Éléments de réponse

$$\begin{aligned}
 \text{Si } i \neq j : \text{ on a que : } & a_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) \\
 & = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) \\
 & = -p_i p_j \\
 \text{Si } i = j : \text{ on a que : } & a_{i,i} = \text{Cov}(X_i, X_i) \\
 & = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 \\
 & = \mathbb{V}(X_i) \\
 & = p_i(1 - p_i)
 \end{aligned}$$

Q37. Soit U la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer le produit AU .

Q 37 | Éléments de réponse

Il est immédiat que $AU \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par ailleurs le coefficient de la i^{e} ligne de la matrice colonne AU est donc :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n a_{i,j} \times 1 &= p_i(-p_1 - p_2 - \dots - p_{i-1} + (1 - p_i) - p_{i+1} - \dots - p_n) \\
 &= p_i \times \left(1 - \sum_{j=1}^n p_j\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

et donc $AU = (0)$.

Q38. La matrice A est-elle inversible ?

Q 38 | Éléments de réponse

Puisque $AU = (0)$, si A était inversible, on aurait que $A^{-1}AU = U$ avec $A^{-1}AU = \underbrace{A^{-1}(0)}_{=(0)}$ ce qui donnerait que $U = (0)$ qui n'est clairement pas le cas.

Partie C | Étude d'une inégalité

Soient $x(1, n)$ et $(y_1)_{1 \leq n}$ deux éléments de \mathbb{R}^n tel que $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$.

On considère alors le polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, Q(t) = \sum_{i=1}^n (x_i t + y_i)^2$

Q39. En considérant le signe du polynôme Q , établir l'inégalité suivante : $(\star) : \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$

Q 39 | Éléments de réponse

Par somme, il est immédiat que Q est un polynôme de degré 2 en t qui est positif ou nul donc son discriminant Δ est négatif ou nul.

Un calcul direct donne que : $\forall t \in \mathbb{R}, Q(t) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \times t^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) \times t + \sum_{i=1}^n y_i^2$

Ainsi, on a donc que : $\Delta = \left(2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)\right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$

ce qui amènera bien à : $(\star) : \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$

Q40. Dans quel cas l'inégalité (\star) est-elle un égalité ?

Q 40 | Éléments de réponse

Il y aura égalité dans (*) lorsque $\Delta = 0$, ce qui signifie que le polynôme Q s'annule une unique fois. Par construction de Q , cela n'est possible que si il existe t_0 tel que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $x_i t_0 + y_i = 0$ et donc que $(y_1, \dots, y_n) = t_0 (x_1, \dots, x_n)$. La réciproque étant immédiate, on a donc que (*) est une égalité si, et seulement si, (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont colinéaires.

Partie D | Étude d'une autre variable aléatoire

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$.

On désigne alors par Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$.

Q41. Quelle relation doit satisfaire $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour que $\mathbb{E}(Z_n) = 1$.

Q 41 | Éléments de réponse

La linéarité de l'espérance donne directement que $\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$ et donc on doit avoir $\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = 1$.

Q42. On rappelle que : $\mathbb{V}(Z_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j)$.

On suppose dans cette question que $\mathbb{E}(Z_n) = 1$. Établir que : $\mathbb{V}(Z_n) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i \right) - 1$

puis justifier que $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i \geq 1$.

Q 42 | Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Z_n) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i (1 - p_i) - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i \alpha_j p_i p_j \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i^2 - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i \alpha_j p_i p_j \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \times \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_j p_j \right) - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i \alpha_j p_i p_j \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i p_i \alpha_j p_j - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i \alpha_j p_i p_j \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i - 1 \end{aligned}$$

Par ailleurs (*) donne avec $x_i = \sqrt{p_i}$ et $y_i = \alpha_i \sqrt{p_i}$: $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i \right)$

autrement dit que $1 \leq 1 \times \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i$

Q43. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on pose $x_i = \sqrt{p_i}$ et $y_i = \alpha_i \sqrt{p_i}$.

Montrer qu'il existe un unique élément $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de \mathbb{R}^n que l'on déterminera, qui vérifie les deux conditions $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{V}(Z_n)$ minimale.

Q 43 | Éléments de réponse

La question précédente donne que si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est tel que $\mathbb{E}(Z_n)$ on a $\mathbb{V}(Z_n)$ avec égalité lorsque $(\alpha_1\sqrt{p_1}, \dots, \alpha_n\sqrt{p_n})$ est colinéaire à $(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$, ce qui est le cas si $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$ et donc que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est colinéaire à $(1, \dots, n)$.

Comme il faut également que $\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = 1$, on a donc que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$.

Il reste alors à vérifier qu'avec un tel élément de \mathbb{R}^n , on a bien $\mathbb{E}(Z_n) = 1$ et $\mathbb{V}(Z_n) = 0$ ce qui est la valeur minimale pour une variance.

Partie E | Étude d'une autre famille de variables aléatoires

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On considère les n variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n qui vérifient les propriétés suivantes :

- $\sum_{i=1}^n Y_i = 1$;
- pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ les variables X_i et Y_i suivent la même loi ;
- pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket$, les variables aléatoires X_i et Y_j sont indépendantes

On désigne alors par T_n la variable aléatoire définie par : $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - Y_i)^2}{p_i(1-p_i)}$.

Q44. Déterminer la loi de T_n .

Q 44 | Éléments de réponse

Puisque $X_i(\Omega) = Y_j(\Omega) = \{0, 1\}$, on a donc que $(X_i - Y_j)(\Omega) = \{0, 1\}$.

Par hypothèse sur X_1, \dots, X_n et sur les Y_1, \dots, Y_n , seul l'un des X_i peut prendre la valeur 1 et seul d'un des Y_i peut valeur 1.

1^e cas : soit il s'agit des deux mêmes indices et donc dans ce cas $T_n = 0$. Ce cas là n'arrive qu'avec une probabilité de $\frac{1}{n}$ par indépendance des X_i et Y_i puisqu'il s'agit de s'intéresser aux n cas $X_1 = Y_1 = 1, X_2 = Y_2 = 1, \dots, X_n = Y_n = 1$.

2^e cas : soit ce sont deux indices différents i et j et dans ce cas alors $T_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p_i(1-p_i)} + \frac{1}{p_j(1-p_j)} \right)$. Le cas où l'on travaille avec i et j différents n'arrive qu'avec la probabilité de $1 - \frac{1}{n}$. Or il y a $n^2 - n$ cas pour lesquels $X_i = Y_j = 1$ avec $i \neq j$ ce qui donne que T_n prend cette valeur avec la probabilité $(n^2 - n) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$.

$$\text{Ainsi, on a : } \begin{cases} \mathbb{P}([T_n = 0]) &= \frac{1}{n} \\ \forall (i, j), i \neq j \mathbb{P} \left(\left[T_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p_i(1-p_i)} + \frac{1}{p_j(1-p_j)} \right) \right] \right) &= \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

Q45. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$.

Q 45 | Éléments de réponse

Par linéarité, il vient que : $\mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i(1-p_i)} \mathbb{E}((X_i - Y_i)^2)$

$$\begin{aligned} \text{Comme on a : } \mathbb{E}((X_i - Y_i)^2) &= \mathbb{E}(X_i^2) - 2\mathbb{E}(X_i Y_i) + \mathbb{E}(Y_i^2) \\ &\stackrel{X_i \text{ et } Y_i \text{ indep.}}{=} \mathbb{E}(X_i^2) - 2\mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(Y_i) + \mathbb{E}(Y_i^2) \\ &\stackrel{X_i^2 = X_i}{=} \mathbb{E}(X_i) - 2\mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(Y_i) + \mathbb{E}(Y_i) \\ &\stackrel{Y_i^2 = Y_i}{=} 2p_i - 2p_i^2 \end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2p_i - 2p_i^2}{p_i(1-p_i)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2 \\ &= 2\end{aligned}$$