Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Réaliser l'entête de votre devoir en respectant les éléments suivants : inscrire en haut à gauche de la première copie double, vos nom (en majuscules et en rouge) et prénom (en écriture spéculaire et en bleu) tels qu'ils figurent sur votre dossier d'inscription en commençant au plus à 1 cm du bord gauche de la feuille et au plus à 3 cm du bord supérieur de la feuille, puis au même niveau sur la partie droite de la page, inscrire la date du devoir au format JJ-MM-AAAA ; en sautant une ligne, sous votre nom, inscrire « CPGE-BL 1eannée » ; en laissant un espacement d'environ 2 cm par rapport à la dernière ligne écrite, inscrire en toutes lettres, et en respectant la casse, « Devoir Surveillé n° 14 » au centre de la ligne ; pour finir, laisser un espacement d'environ 2 cm par rapport à cette dernière ligne, tirer un trait horizontal sur la totalité de la largeur de la page, dessiner sous ce trait un lapin, tourner ensuite la page, et commencer par le premier problème ou exercice en commençant en haut de la page.

Q 1| Éléments de réponse

Tout le monde n'a pas le même talent de dessinateur...

Problème n° 1 | Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

Partie A | Étude d'un premier sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

Dans tout ce qui suit, u et v désignent deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{R}^3$.
On désigne par F_1 le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ (x+y+z+t)u + (x+t)v = \overrightarrow{0}\right\}$$

Q2. Le vecteur $e_0 = (2,-1,1,-2)$ appartient-il à F_1 ?

Q 2| Éléments de réponse

Par définition de F_1 : $\quad (e_0 \in F) \quad \Leftrightarrow \quad \left((2+(-1)+1+(-2))\,u + (2+(-2))\,v = \overrightarrow{0}\right)$

Un calcul direct donne que : $\quad \begin{aligned}(2+(-1)+1+(-2))\,u + (2+(-2))\,v &= 0\times u + 0\times v\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$

Ainsi, $e_0 \in F_1$.

Q3. Déterminer un couple de réels (y,t) tel que $f_0 = (1,y,1,t)$ appartienne à F_1.

Q 3| Éléments de réponse

Le couple $(-1,-1)$ convient. Dans ce cas on a $f_0 = (1,-1,1,-1)$ et :

$$(f_0 \in F) \quad \Leftrightarrow \quad \left((2+(-1)+1+(-1))\,u + (1+(-1))\,v = \overrightarrow{0}\right)$$

Un calcul direct donne que : $\quad \begin{aligned}(2+(-1)+1+(-1))\,u + (1+(-1))\,v &= 0\times u + 0\times v\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$

Ainsi, $f_0 = (1,-1,1,-1) \in F_1$.

Q4. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Q 4| Éléments de réponse

Le vecteur nul $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^4$ appartient à F_1 : en effet, on a trivialement que $\underbrace{(0+0+0+0)}_{=0} u + \underbrace{(0+0)}_{=0} v = \overrightarrow{0}$.

F_1 **est stable par combinaison linéaire :** soient $\begin{cases} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ w_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1) & \in & F_1 \\ w_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2) & \in & F_2 \end{cases}$

On pose $w_3 = \lambda w_1 + w_2$ avec $w_3 = (x_3, y_3, z_3, t_3)$, et montrons que $w_3 \in F_1$, c'est à dire que l'on a $(x_3 + y_3 + z_3 + t_3)\, u + (x_3 + t_3)\, v = \overrightarrow{0}$.

Par construction de w_3 on a : $\begin{cases} x_3 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ y_3 & = & \lambda y_1 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda z_1 + z_2 \\ t_3 & = & \lambda t_1 + t_2 \end{cases}$

On a alors :

$$\begin{aligned}
& (x_3 + y_3 + t_3 + z_3)\, u + (x_3 + y_3)\, v \\
= \; & (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2 + \lambda t_1 + t_2)\, u + (\lambda x_1 + x_2 + \lambda t_1 + t_2)\, v \\
= \; & (\lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda y_3 + \lambda t_3)\, u + (x_2 + y_2 + z_2 + t_2)\, u + (\lambda x_1 + \lambda t_1)\, v + (x_2 + t_2)\, v \\
= \; & \lambda \underbrace{((x_1 + y_1 + z_1 + t_1)\, u + (x_1 + t_1)\, v)}_{=\overrightarrow{0} \text{ car } w_1 \in F_1} + \underbrace{(x_2 + y_2 + z_2 + t_2)\, u + (x_2 + t_2)\, v}_{=\overrightarrow{0} \text{ car } w_2 \in F_2} \\
= \; & \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Ainsi, $w_3 \in F_1$ c'est à dire que $\lambda w_1 + w_2 \in F_1$ et donc F_1 est stable par combinaison linéaire.

Par suite F_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Q5. La famille $\mathcal{F}_0$ formée des deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ? Justifier votre réponse.

Q 5| Éléments de réponse

Supposons par l'absurde que la famulle $\mathcal{F}_0$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.
Dans ce cas il existe une relation de dépendance entre u et v de la forme $\lambda u + \mu v = \overrightarrow{0}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\lambda \neq 0$, et dans ce cas, on ne peut avoir non plus $\mu = 0$ car sinon on aurait $\lambda u = vect0$ avec $\lambda \neq 0$ et $u \neq \overrightarrow{0}$ ce qui n'est pas possible. Il vient alors que $u = -\dfrac{\mu}{\lambda} v$ et donc que u et v sont colinéaires, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur u et v.
Par conséquent, la famille $\mathcal{F}_0$ est une famille libre.

Q6. Montrer alors que : $\quad (u = (x, y, z, t) \in F_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x \qquad\quad + t = 0 \end{cases}$.

Q 6| Éléments de réponse

Il est clair que si $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est tel que $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x \qquad\quad + t = 0 \end{cases}$, il est immédiat que $(x + y + z + t)u + (x + t)v = \overrightarrow{0}$ et donc $(x, y, z, t) \in F_1$.
Réciproquement, si $(x, y, z, t) \in F_1$. Alors $(x + y + z + t)u + (x + t)v = \overrightarrow{0}$, cette dernière relation étant une combinaison linéaire nulle des vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$. Comme la famille $\mathcal{F}_0$ est une famille libre, on en déduit que les coefficients de cette combinaison linéaire sont tous nuls, c'est à dire que $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x \qquad\quad + t = 0 \end{cases}$, d'où l'équivalence demandée.

Q7. Déterminer les solutions du système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x \qquad\quad + t = 0 \end{cases}$.

Q 7| Éléments de réponse

On procède par échelonnement en lignes de la représentation matricielle de ce système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, les solutions du système $(\mathcal{S})$ sont les $4-$uplets solutions donnés par :

$$\left\{\begin{array}{rcrr} x & = & & -t \\ y & = & -z & \\ z & = & z & \\ t & = & & t \end{array}\right. \quad \text{où } (z,t) \in \mathbb{R}^2$$

Q8. Déduire des questions précédentes deux vecteurs e_1 et e_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $F_1 = \text{Vect}\,(e_1, e_2)$.

Q 8| Éléments de réponse

On en déduit donc que :

$$\begin{array}{rcl} (u = (x,y,z,t) \in F_1) & \Leftrightarrow & \left(u = (-t,-z,z,t) \text{ où } (z,t) \in \mathbb{R}^2\right) \\ & \Leftrightarrow & \left(u = z\,(0,-1,1,0) + t\,(-1,0,0,1) \text{ où } (z,t) \in \mathbb{R}^2\right) \\ & \Leftrightarrow & \left(u \in \text{Vect}\,((0,-1,1,0),(-1,0,0,1))\right) \end{array}$$

Par suite, en posant $e_1 = (0,-1,1,0)$ et $e_2 = (-1,0,0,1)$, on a $F = \text{Vect}\,(e_1, e_2)$.

Partie B | Étude d'un deuxième sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

On désigne par F_2 le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z = 0 \text{ et } y + t = 0\right\}$$

Q9. Montrer que les vecteurs $g_1 = (1,1,0,-1)$ et $g_2 = (-1,0,1,0)$ appartiennent à F_2.

Q 9| Éléments de réponse

Par définition de F_2, on a : $\quad (g_1 \in F_2) \quad \Leftrightarrow \quad (1 - 1 + 0 = 0 \text{ et } 1 + (-1) = 0)$
Il est clair que $1 - 1 + 0 = 0$ et $1 + (-1) = 0$, et par suite $g_1 \in F_2$.
Sur le même principe, puisque $-1 - 0 + 1 = 0$ et $0 + 0 = 0$, il vient que $g_2 \in F_2$.

Q10. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer les équations de compatibilité du système de repésentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ -1 & 0 & t \end{array}\right)$.

Q 10| Éléments de réponse

On procède par un échelonnement réduit en lignes :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ -1 & 0 & t \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & -1 & x+t \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & x-y+z \\ 0 & 0 & y+t \end{array}\right)$$

Ce système possède deux équations de compatibilité présentes en L_3 et L_4 de cette dernière échelonnée :

$$x - y + z = 0 \text{ et } y + t = 0$$

Q11. Déduire de ce qui précède que $F_2 = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2)$.

Q 11| Éléments de réponse

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
(u = (x, y, z, t) \in \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2)) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\exists\,(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\, u = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\text{Le système de représentation matricielle } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ -1 & 0 & t \end{array}\right) \text{ est compatible}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z & = 0 \\ \quad y \quad + t & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad (u \in F_2)
\end{aligned}$$

et par conséquent $F_2 = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2)$.

Q12. F_2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?

Q 12| Éléments de réponse

D'après ce qui précède F_2 est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs g_1 et g_2, donc par théorème F_2 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Partie C | Décomposition de $\mathbb{R}^4$

On désigne par $\mathcal{G}$ la famille formée des vecteurs $u_1 = (0, 1, -1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0, -1)$, g_1 et g_2.

Q13. La famille $\mathcal{G}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.

Q 13| Éléments de réponse

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{G}$.
La famille $\mathcal{G}$ étant une famille de 4 vecteurs, par théorème, la famille $\mathcal{G}$ est libre si, et seulement si, le rang de la matrice A est de 4.
Un échelonnement en lignes donne :
et par suite $\mathrm{rg}\,(A) = 4$, ce qui assure la liberté de la famille $\mathcal{G}$.

Q14. La famille $\mathcal{G}$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.

Q 14| Éléments de réponse

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{G}$.
La famille $\mathcal{G}$ étant une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, par théorème, la famille $\mathcal{G}$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, le rang de la matrice A est de 4.
Or d'après la question précd́ente, $\mathrm{rg}\,(A) = 4$, ce qui assure que la famille $\mathcal{G}$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Q15. Montrer que tout vecteur $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

Q 15| Éléments de réponse

D'après les questions précédentes, on a $F_1 = \text{Vect}\,(e_1, e_2) = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$ puisque $e_1 = -u_1$ et $e_2 = -u_2$ et donc un vecteur f_2 appartient à F_1 si, et seulement si, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$.
On rappelle que $F_2 = \text{Vect}\,(g_1, g_2)$ et donc un vecteur f_2 appartient à F_2 si, et seulement si, il existe $(\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_2 = \lambda_3 g_1 + \lambda_4 g_2$.
En désignant par $u = (x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$, le vecteur u se décompose de manière unique comme combinaison linéaire d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 si, et seulement si, il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 g_1 + \lambda_4 g_2$$

ce qui signifie que le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & -1 & -1 & 0 & t \end{array}\right)$ admet une unique solution.
Or il s'agit d'un système de taille 4×4 qui est de rang 4 d'après l'échelonnement précédent, donc par théorème il admet une unique solution.
Par suite,tout vecteur $u = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

Problème n° 2 | Puissances d'une famille de matrices

Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, on désigne par $M(a)$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.
On se propose dans cet exercice de déterminer une expression de $(M(a))^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Partie A | Recherche des matrices $M(a)$ inversibles

Q16. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $M(a) \times M(b) = M(a + b - 2ab)$.

Q 16| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} M(a) \times M(b) &= \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-b & b \\ b & 1-b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-a)(1-b) + ab & (1-a)b + a(1-b) \\ (1-a)b + a(1-b) & (1-a)(1-b) + ab \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-a-b+2ab & a+b-2ab \\ a+b-2ab & 1-a-b+2ab \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-(a+b-2ab) & a+b-2ab \\ a+b-2ab & 1-(a+b-2ab) \end{pmatrix} \\ &= M(a+b-2ab) \end{aligned}$$

Q17. Explicitez la matrice $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$, puis en étudier l'inversibilité.

Q 17| Éléments de réponse

Il est immédiat que $M\left(\dfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Puisque $M\left(\dfrac{1}{2}\right) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par théorème, $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est inversible si, et seulement si, $\det\left(M\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) \neq 0$.

Or un calcul direct donne que :
$$\det\left(M\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = 0$$
ce qui assure que $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible.

Q18. Montrer que la matrice $M(a)$ est inversible si, et seulement si, $a \neq \frac{1}{2}$.

Q 18| Éléments de réponse

Puisque $M(a) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par théorème, $M(a)$ est inversible si, et seulement si, $\det(M(a)) \neq 0$.
Un calcul direct donne que :
$$\det(M(a)) = \begin{vmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 - a^2 = 1 - 2a + a^2 - a^2 = 1-2a$$
Par suite, il vient que : $(\det(M(a)) = 0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(a = \frac{1}{2}\right)$.

Finalement, on a bien que la matrice $M(a)$ est inversible si, et seulement si, $a \neq \frac{1}{2}$.

Q19. Pour $a \neq \frac{1}{2}$, déterminer en fonction de a, le réel b tel que $M(b) = (M(a))^{-1}$.

Q 19| Éléments de réponse

D'après le cours, on sait que $(M(a))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} 1-a & -a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$.

Par suite, il vient que :
$$(M(a))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-a}{1-2a} & \frac{a}{2a-1} \\ \frac{a}{2a-1} & \frac{1-a}{1-2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-2a+a}{1-2a} & \frac{a}{2a-1} \\ \frac{a}{2a-1} & \frac{1-2a+a}{1-2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{a}{1-2a} & \frac{a}{2a-1} \\ \frac{a}{2a-1} & 1+\frac{a}{1-2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{a}{2a-1} & \frac{a}{2a-1} \\ \frac{a}{2a-1} & 1-\frac{a}{2a-1} \end{pmatrix}$$
et par suite en posant $b = \frac{a}{2a-1}$, on a bien $M(b) = (M(a))^{-1}$.

Q20. Déterminer l'unique réel non nul noté a_0 tel que $(M(a_0))^2 = M(a_0)$.

Q 20| Éléments de réponse

Puisque $(M(a_0))^2 = M(a_0) \times M(a_0)$ d'après ce qui précéde $(M(a_0))^2 = M\left(2a_0 - 2a_0^2\right)$.

Par suite : $\left((M(a_0))^2 = M(a_0)\right) \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1-(2a_0-2a_0^2) & 2a_0-2a_0^2 \\ 2a_0-2a_0^2 & 1-(2a_0-2a_0^2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a_0 & a_0 \\ a_0 & 1-a_0\end{pmatrix}\right)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(a_0 - 2a_0^2 = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(a_0(1-2a_0)^2 = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(a_0 \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right)\end{aligned}$$

Et par suite, l'unique réel non nul tel que $(M(a_0))^2 = M(a_0)$ est $a_0 = \dfrac{1}{2}$.

Partie B | Calcul des puissances de $M(a)$

On définit les matrices P et Q de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $P = M(a_0)$ et $Q = \mathrm{I}_2 - P$.

Q21. Donner l'expression de P^2, PQ, QP et Q^2 en fonction des matrices P, Q ou de la matrice nulle.

Q 21| Éléments de réponse

D'après ce qui précéde $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et par suite $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \\ &= P\end{aligned}$$

De même, on va avoir : $$\begin{aligned} Q^2 &= (\mathrm{I}_2 - P)(\mathrm{I}_2 - P) \\ &= \mathrm{I}_2^2 - \mathrm{I}_2 P - P\mathrm{I}_2 + P^2 \\ &= \mathrm{I}_2 - P - P + P \\ &= \mathrm{I}_2 - P \\ &= Q\end{aligned}$$

et un calcul direct donne que : $$\begin{aligned} QP &= (\mathrm{I}_2 - P)P \\ &= \mathrm{I}_2 P - P^2 \\ &= P - P \\ &= 0\end{aligned}$$

puis : $$\begin{aligned} P &= P(\mathrm{I}_2 - P) \\ &= P\mathrm{I}_2 - P^2 \\ &= P - P \\ &= 0\end{aligned}$$

Q22. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de a le réel α tel que $M(a) = P + \alpha Q$.

Q 22| Éléments de réponse

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a directement que : $$\begin{aligned} P + \alpha Q &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\alpha) & \frac{1}{2}(1-\alpha) \\ \frac{1}{2}(1-\alpha) & \frac{1}{2}(1+\alpha)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha) & \frac{1}{2}(1-\alpha) \\ \frac{1}{2}(1-\alpha) & 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et par suite, en posant $a = \dfrac{1}{2}(1-\alpha)$, on a $M(a) = P + \alpha Q$.

Q23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression de $(M(a))^n$ en fonction de P, Q, α et n.

Q 23| Éléments de réponse

Puisque $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$, on peut montrer que $P^k = P$ et $Q^k = Q$ pour tout $k \geq 1$.

si $n \geq 2$ **:** on a :

$$\begin{aligned} A^n &= (P+\alpha Q)^n \\ &\underset{PQ=QP}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} P^k Q^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} \alpha^n P^0 Q^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} P^k Q^{n-k} + \binom{n}{n} \alpha^0 P^n Q^0 \\ &= \alpha^n Q^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \underbrace{PQ}_{=0} + P^n \\ &= \alpha^n Q^n + P^n \\ &= \alpha^n Q + P \end{aligned}$$

si $n = 0$ **:** $A^0 = \mathrm{I}_2$ et on a bien $\alpha^0 Q + P = \mathrm{I}_2$ ce qui assure que la formule est encore valable pour $n = 0$

si $n = 1$ **:** $A^1 = A$ et on a bien $\alpha^1 Q^1 + P^1 = A$ ce qui assure que la formule est encore valable pour $n = 1$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P + \alpha^n Q$.

Q24. Expliciter alors la matrice $(M(a))^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Q 24| Éléments de réponse

Il vient directement alors que $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\alpha^n) & \frac{1}{2}(1-\alpha^n) \\ \frac{1}{2}(1-\alpha^n) & \frac{1}{2}(1+\alpha^n) \end{pmatrix}$.

Problème n° 3 | Racine carrée de matrices

On considère la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On se propose dans ce problème de déterminer le(s) matrice(s) $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^2 = A$.

Partie A | Un premier résultat

Q25. Déterminer les solutions de l'équation $(\star)$ d'inconnue λ suivante : $(\star)$: $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$

Q 25| Éléments de réponse

On a tout d'abord que $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Par définition de la trace d'une matrice, on a : $\operatorname{tr}(A) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$

et par définition du déterminant d'une matrice que :
$$\det(A) = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Il s'agit donc de résoude l'équation $(\star)$: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, qui est une équation de degré 2 en λ, de déterminant $\Delta = 9 > 0$, et dont les deux solutions réelles sont 4 et 1.
Ainsi, l'ensemble des solutions de $(\star)$ est $\{1, 4\}$.

Q26. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette question que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible.
Montrer que λ est solution de $(\star)$.

Q 26| Éléments de réponse

Par construction : $A - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{pmatrix}$

Puisque $A - \lambda \mathrm{I}_2 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par théorème, $A - \lambda \mathrm{I}_2$ est inversible si, et seulement si, $\det(A - \lambda \mathrm{I}_2) \neq 0$.

Un calcul direct donne alors :
$$\det(A - \lambda \mathrm{I}_2) = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2} - \lambda\right) - \frac{9}{4} = \frac{25}{4} - 5\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{4} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

et par suite, puisque par hypothèse $A - \lambda \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible, il vient que λ est solution de $(\star)$.

Q27. Montrer que si λ est solution de $(\star)$, alors la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible.

Q 27| Éléments de réponse

D'après ce qui précéde $\det(A - \lambda \mathrm{I}_2) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$.
Si λ est solution de $(\star)$, alors $\det(A - \lambda \mathrm{I}_2) = 0$, ce qui assure que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible.

Partie B | Transformation du problème

Q28. Déterminer toutes les matrices colonnes $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = X$.

Q 28| Éléments de réponse

En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, il vient que :

$$\begin{aligned}
(AX = X) \quad & \Leftrightarrow \quad (AX - X = (0)) \\
& \Leftrightarrow \quad ((A - \mathrm{I}_2)\, X = (0)) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
& \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & = & -y \\ y & = & y \end{cases}, \ y \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow \quad \left(X = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R} \right)
\end{aligned}$$

Q29. On considère la matrice $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que P est inversible et expliciter la matrice P^{-1}.

Q 29| Éléments de réponse

Il est immédiat que $\det(P) = 2$. Comme $\det(P) \neq 0$, par théorème P est inversible et on a $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q30. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale notée D par la suite.

Q 30| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP \quad & = \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
& = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
& = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Q31. Pour $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque, on note $\Delta = P^{-1}MP$. Établir que :

$$(M^2 = A) \quad \Leftrightarrow \quad (\Delta^2 = D)$$

Q 31| Éléments de réponse

Tout d'abord, on a $D = P^{-1}AP$, donc en multipliant à gauche par P, il vient que $PD = AP$ et en multipliant à droite par P^{-1}, il vient que $PDP^{-1} = A$.

On a :
$$\begin{aligned}
\left(M^2 = A\right) &\Leftrightarrow \left(M^2 = PDP^{-1}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(P^{-1}M^2 = DP^{-1}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(P^{-1}M^2P = D\right)\\
&\Leftrightarrow \left(P^{-1}MMP = D\right)\\
&\Leftrightarrow \left(P^{-1}M\mathrm{I}_2MP = D\right)\\
&\Leftrightarrow \left(P^{-1}MPP^{-1}MP = D\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\Delta^2 = D\right)
\end{aligned}$$

Partie C | Résolution de l'équation $M^2 = A$

Q32. Dans cette question Δ désigne une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D$.
Montrer que $\Delta D = D\Delta$ puis en déduire que Δ est une matrice diagonale.

Q 32| Éléments de réponse

Puisque $\Delta^2 = D$, on a donc $\Delta^3 = \Delta D$ en multipliant par Δ à droite, mais aussi $\Delta^3 = D\Delta$ en multilpliant par Δ g̀auche, ce qui assure que $D\Delta = \Delta D$.

En notant $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, un calcul direct donne que $\Delta D = \begin{pmatrix} a & 4b \\ c & 4d \end{pmatrix}$ et $D\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a donc par identification que : $\left\{\begin{array}{rcl} a &=& a \\ 4b &=& b \\ c &=& 4c \\ 4d &=& 4d \end{array}\right.$

ce qui conduit à $b = c = 0$ avec a et d quelconques. Donc Δ est bien diagonale.

Q33. Résoudre l'équation $\Delta^2 = D$ d'inconnue la matrice $\Delta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 33| Éléments de réponse

D'après ce qui précéde, une telle matrice Δ est nécessaire diagonale, et en notant $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, on a $\Delta^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$ et par identification des coefficients dans la relation $\Delta^2 = D$, on doit avoir :

$$\Delta \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ce qui est exactement l'ensemble des solutions de l'équation $\Delta^2 = D$.

Q34. Déterminer toutes les solutions de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue la matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 34| Éléments de réponse

D'après ce qui précéde, les matrices M solutions de l'équation $M^2 = A$ sont les matrices $M = P\Delta P^{-1}$ où Δ est telle que $\Delta^2 = D$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $M^2 = A$ est :

$$\left\{ P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} \right\}$$

c'est à dire :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Problème n° 4 | Inverse généralisée ou pseudo-inverse d'une matrice

Dans tout ce qui suit n désigne un entier naturel non nul.

On dit que la matrice $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ lorsque les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$(\star_1) : AUA = A \quad (\star_2) : UAU = U \quad (\star 3) : UA = AU$$

Le but de ce problème est de caractériser l'existence d'un pseudo-inverse pour une matrice carrée donnée et d'obtenir une méthode de calcul lorsqu'il existe.

Partie A | Résultats préliminaires

Q35. Soit P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P^{-1} est un pseudo-inverse de P.

Q 35| Éléments de réponse

Montrons que P^{-1} et P satisfont les relations $(\star_1)$, $(\star_2)$ et $(\star_3)$.
Il est immédiat que $P^{-1}PP^{-1} = P^{-1}$ ce qui correspond à $(\star_1)$. De même $PP^{-1}P = P$ ce qui correspond à $(\star_2)$ et on a aussi $(\star_3)$ car $P^{-1}P = PP^{-1}$.

Q36. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet un pseudo-inverse que l'on note U. $P^{-1}UP$ est-il un pseudo-inverse de $P^{-1}AP$?

Q 36| Éléments de réponse

Vérification de $(\star_1)$ **:**
$$\begin{aligned}\left(P^{-1}UP\right)\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}UP\right) &= P^{-1}U\left(PP^{-1}\right)A\left(PP^{-1}\right)UP \\ &= P^{-1}UAUP \\ &= P^{-1}UP\end{aligned}$$

Vérification de $(\star_2)$ **:**
$$\begin{aligned}\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}UP\right)\left(P^{-1}AP\right) &= P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)U\left(PP^{-1}\right)AP \\ &= P^{-1}AUAP \\ &= P^{-1}AP\end{aligned}$$

Vérification de $(\star_3)$ **:**
$$\begin{aligned}\left(P^{-1}UP\right)\left(P^{-1}AP\right) &= P^{-1}U\left(PP^{-1}\right)AP \\ &= P^{-1}UAP \\ &= P^{-1}AUP \\ &= \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}UP\right)\end{aligned}$$

Par suite $P^{-1}UP$ est bien un pseudo-inverse de la matrice $P^{-1}AP$.

Partie B | Étude d'un exemple

Dans cette partie, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Q37. Quel est le rang de A ? La matrice A est-elle inversible ?

Q 37| Éléments de réponse

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 2 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 2 et la matrice est n'est pas inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 2.

Q38. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Effectuer le produit PQ. En déduire que P et inversible et expliciter alors P^{-1}.

Q 38| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $PQ = 4\mathrm{I}_4$ ce qui donne que $P \times \left(\frac{1}{4}Q\right) = \mathrm{I}_3$ ce qui assure que P est inversible à droite, donc inversible et d'inverse $\frac{1}{4}Q$, c'est à dire $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Q39. Montrez que la matrice $A' = P^{-1}AP$ est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ et à déterminer.

Q 39| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 & 20 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc $A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q40. On note $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ a été déterminé à la question précédente.

Justifier que A_1 est inversible et expliciter les quatre coefficients α', β', γ', δ' de $(A_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$.

Q 40| Éléments de réponse

La matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont le déterminant $\det(A_1) = 3 \times 3 - 1 \times 5 = 4 \neq 0$, donc par théorème, la matrice A_1 est inversible d'inverse $(A_1)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ce qui donne $(A_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Q41. Montrer que la matrice $U' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & 0 \\ \gamma' & \delta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un pseudo-inverse de la matrice A'.

Q 41| Éléments de réponse

On a donc $U' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Par calcul direct :

Vérification de $(\star_1)$ **:** $A'U' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U'A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A'U' = U'A'$.

Vérification de $(\star_2)$ **:** puisque l'on a $(\star_1)$, on a donc $A'U'A' = A'\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A'\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ ce qui assure que $A'U'A' = A'$.

Vérification de $(\star_3)$ **:** de même, on a $U'A'U' = U'\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et comme $U'\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U'$ on a bien $U'A'U' = U'$.

Par suite, U' est bien un pseudo-inverse de A'.

Q42. Déterminer alors un pseudo-inverse U de la matrice A que l'on exprimera en fonction de matrices définies dans les questions précédentes.

Q 42| Éléments de réponse

Puisque $A' = P^{-1}AP$, on a donc $A = PA'P^{-1}$. D'après les résultats préliminaires, on en déduit que $U = PU'P^{-1}$ est un pseudo-inverse de la matrice A.

Partie C | Unicité du pseudo-inverse

Dans cette partie A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'objet de ce qui suit est de démontrer que si A admet un pseudo-inverse, alors ce dernier est unique.
On suppose que A admet deux pseudo-inverses U et U'.

Q43. En calcul le produit $AUAU'$ de deux manières différentes, montrer que $UA = AU'$.

Q 43| Éléments de réponse

On a tout d'abord que $AUAU' \underset{(\star_1)}{=} AU'$ et que $AUAU' \underset{(\star_3)}{=} UAU'A \underset{(\star_1)}{=} UA$ ce qui donne bien que $UA = AU'$.

Q44. En déduire que $U = U'$.

Q 44| Éléments de réponse

On a directement que $U \underset{(\star_2)}{=} UAU \underset{UA=AU'}{=} AU'U \underset{(\star_3)}{=} U'AU \underset{(\star_3)}{=} U'UA \underset{UA=AU'}{=} U'AU' \underset{(\star_2)}{=} U'$ d'où l'unicité du pseudo-inverse.