Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Problème n° 1 | Jeu à la fête foraine

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de `pile` obtenus. Si ce nombre est pair, le jouer est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque `pile` obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque `pile` obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun `pile`, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien.

La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir `pile` est égale à $p \in]0;1[$, et celle d'obtenir `face` est de $1-p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de `pile` obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie A | Étude d'une première configuration de jeu

Dans cette partie uniquement on suppose que $n = 3$ et que $p = \dfrac{2}{3}$.

Q1. Reconnaître la loi de X, puis vérifier que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.

Q2. Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

Q3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G. Le jeu est-il favorable au jouer ?

Partie B | Étude du cas général

Dans cette partie, on revient au cas général où n est un entier naturel non nul et $p \in]0;1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan « À ce jeur, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécéssaires sur p et n pour que son slogan ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = (-1)^X$. Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

Q4. On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Q5. Démontrer que $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

Q6. Donner la loi de X.

Q7. En déduire que l'on a également : $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

puis que : $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

Q8. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

Q9. Démontrer que : $\left(\mathbb{P}(A) \geq \dfrac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(p \leq \dfrac{1}{2} \text{ ou « } n \text{ est pair »}\right)$

Partie C | Jeu attractif... mais rentable

Le concepteur du jeu souhaite vérifier que, tout en laissant son jeu attractif, c'est à dire en faire en sorte que $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$, son activité soit rentable pour lui, autrement dit, que le jeu soit défavorable au jeu, c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leq 0$.

Q10. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \mathbb{P}([X = k])$

Q11. Démontrer que : $\forall k \in [\![1; n]\!], \, k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Q12. Montrer que $\mathbb{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$.

Q13. Démontrer alors que : $\left(\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{E}(G) \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(p \leq \frac{1}{2}\right)$

Q14. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \, f(x) = x(1-2x)^{n-1}$

Q15. Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce, c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Partie D | Étude d'une deuxième configuration de jeu

Le forain décire de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$.

En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10% qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.

Pour tout entier i compris entre 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i^e joueur.

On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

Q16. Pour tout i entier de $[\![1; 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

Q17. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.

Q18. Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et que $\mathbb{V}(J) = 11\,250$.

Q19. Justifier que $\mathbb{P}([J \leq 100]) \leq \mathbb{P}([|J - 500| \geq 400])$.

Q20. Rappelez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que $\mathbb{P}([J \leq 100]) \leq \frac{9}{128}$.

Q21. Compte-tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Problème n° 2 | Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. L'objet de ce problème consiste en l'étude du déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

Règle n° 1 : le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ; plus précisement, il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.

Règle n° 2 : pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon, il se déplace de manìere équiprobable vers d'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'évévement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'évévement « le pion se trouve en C à l'étape n ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note par ailleurs :

$$p_n = \mathbb{P}(A_n), \quad q_n = \mathbb{P}(B_n), \quad r_n = \mathbb{P}(C_n), \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

et on désigne par M la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle que si E et F sont deux évévements avec $\mathbb{P}(F) \neq 0$, on note $\mathbb{P}(E \mid F)$ la probabilité conditionnelle de l'événement E sachant l'évévenement F.

Partie A | Préliminaire technique

On désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q22. Justifier que la matrice colonne $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice A, et préciser la valeur propre associée.

Q23. Étudier le rang de la matrice $A - \mathrm{I}_3$. Qu'en conclure pour le spectre de A ?

Q24. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{X_2, X_3\}$ où $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forme une base de $\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{I}_3)$.

Q25. Justifier alors qu'il existe une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible que l'on explicitera telle que $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q26. Déterminer une matrice diagonale Δ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P\Delta P^{-1}$.

Q27. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P\Delta^n P^{-1}$.

Partie B | Étude du déplacement du pion

Pour toute la suite du problème, on admettra que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \dfrac{1}{3 \times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$.

Q28. Déterminer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1 et r_1.

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $V_{n+1} = MV_n$.

Q30. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = M^n V_0$.

Q31. Déduire de ce qui précède une expression de p_n, q_n et r_n en fonction de n.

Q32. Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie C | Étude du nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passage du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire X_n par :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

Q33. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ et le nombre $\mathbb{E}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$.

Q34. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q35. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Partie C | Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

- si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
- sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Le but de cette partie est de déterminer la loi de T_B et son espérance.

Q36. Calculer $\mathbb{P}\left([T_B = 1]\right)$ et $\mathbb{P}\left([T_B = 2]\right)$.

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

Q38. Établir que $\mathbb{P}\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)$ puis en déduire que $\mathbb{P}\left(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Q39. Pour tout ce qui suit, on admet la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(B_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Q40. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}\left([T_B = k]\right)$. Que vaut $\mathbb{P}\left([T_B = 0]\right)$?

Q41. Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?