Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Réaliser l'entête de votre devoir en respectant les éléments suivants : inscrire en haut à gauche de la première copie double, vos nom (en majuscules) et prénom tels qu'ils figurent sur votre dossier d'inscription en commençant au plus à 1 cm du bord gauche de la feuille et au plus à 3 cm du bord supérieur de la feuille, puis au même niveau sur la partie droite de la page, inscrire la date du devoir au format JJ-MM-AAAA ; en sautant une ligne, sous votre nom, inscrire « CPGE-BL 1eannée » ; en laissant un espacement d'environ 2 cm par rapport à la dernière ligne écrite, inscrire en toutes lettres, et en respectant la casse, « Devoir Surveillé n° 13 » au centre de la ligne ; pour finir, laisser un espacement d'environ 2 cm par rapport à cette dernière ligne, tirer un trait horizontal sur la totalité de la largeur de la page, tourner ensuite la page, et commencer par le premier problème ou exercice en commençant en haut de la page.

Problème n° 1 | Déclinaison autour des travaux de vacances

Pour chacune des questions ci-dessous, il est demandé de détailler les calculs.

Q2. Écrire le plus simplement possible l'expression $A = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right) + \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+2}\right) - \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}+2}\right)$.

Q3. Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[,\ \ln\left(x^2-1\right) - \ln\left(x^2+2x+1\right) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Q4. a est un nombre réel différent de 1 tel que $a^6 = 1$.
Que vaut le nombre $B = a^8 - 3a^7 + 4a^6 - a^2 + 3a - 1$?

Q5. a est un nombre réel différent de 1 tel que $a^6 = 1$. Que vaut la somme $S_0 = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$?

Problème n° 2 | Un peu de technique avec les systèmes linéaires

Q6. On considère le système $(\mathcal{S}_0)$ de taille 3×3 ci-contre : $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - z = -6 \\ 2x + y - 2z = -9 \end{cases}$.

On donne ci-dessous l'ensemble des opérations élémentaires nécessaires à la résolution par échelonnement réduit en lignes du système $(\mathcal{S}_0)$. Reproduire pas à pas ces dernières de sorte à expliciter les solutions du système $(\mathcal{S}_0)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & -2 & -9 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

Q7. On considère trois systèmes linéaires $(\mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{S}_2)$ et $(\mathcal{S}_3)$, pour lesquels on a procédé à un échelonnement en lignes de leur représentation matricielle que l'on donne ci-après après échelonnement :

$$(\mathcal{S}_1) : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (\mathcal{S}_2) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (\mathcal{S}_3) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Pour chacun d'entre eux, sans calculs supplémentaires et en le justifiant, donner leur rang et leur nombre de solutions.

Q8. Résoudre à l'aide d'un échelonnement réduit en lignes le système 3×4 ci-dessous, en précisant son rang :

$$(\mathcal{S}_4) : \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y-z+t=-1 \\ -x+y-z+t=4 \end{cases}$$

Q9. On considère trois systèmes linéaires $(\mathcal{S}_5)$, $(\mathcal{S}_6)$ et $(\mathcal{S}_7)$, pour lesquels on a réalisé une succession d'opérations élémentaires sur leur représentation matricielle pour obtenir les matrices augmentées ci-dessous.

$$(\mathcal{S}_5) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad (\mathcal{S}_6) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad (\mathcal{S}_7) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En poursuivant éventuellement l'échelonnement réduit en lignes partiellement réalisé, expliciter les solutions de ces trois systèmes.

Problème n° 3 | Un peu de technique avec les sommes finies

Pour chacune des questions ci-dessous, il est demandé de détailler les calculs.
Dans tout ce qui suit et sauf précision supplémentaire, n désignera un élément de $\mathbb{N}^*$.
On pourra admettre le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Partie A | Autour des sommes de référence

Q10. Déterminer la valeur de la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{k=3}^{15} (3k+2)$.

Q11. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(2^k\right) = \frac{\ln(2)n(n+1)}{2}$.

Q12. Expliciter en fonction de n la valeur de la somme $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} 2^n$.

Q13. La formule suivante est-elle correcte ? Justifier votre réponse.

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^{n-1}-1}{2^n}$$

Partie B | Opérations avec les sommes

Q14. À l'aide du changement d'indice $i = k+2$, calculer la valeur de la somme $S_3 = \displaystyle\sum_{k=4}^{11} (3k+6)$.

Q15. Expliciter, en fonction de n, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - k\right)$ en donnant le résultat sous forme d'un quotient de produits de termes de degré au plus 1 en n.

Q16. On admet que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ \dfrac{2}{k^3-k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{2}{k} + \dfrac{1}{k+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Expliciter en fonction de n, la valeur de la somme $\Delta_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^3-k}$.

On pourra par exemple remarquer que $2 = 1+1$.

Partie C | Un calcul de somme

L'objet de cette partie est de calculer la somme $\Gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$.

Q17. Explicitez, sans la calculer la somme Γ_4.

Q18. Justifier que l'on a : $\Gamma_n = 4\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2 - \sum_{p=1}^{n} (2p-1)^2$.

Q19. Déterminer alors l'expression de Γ_n en fonction de n.

Problème n° 4 | Équations et systèmes à paramètres

Partie A | Équation de degré 2 à paramètres

Dans cette partie, m désigne un réel quelconque.
On considère alors l'équation (E_m) ci-contre : $(E_m) :\ (m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$.

Q20. Résoudre (E_{-3}).

Q21. Résoudre l'équation (E_3).

Q22. On suppose dans toute la suite de cette partie que $m \neq -3$.
Justifier que (E_m) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[1; +\infty\right[$.

Partie B | Un premier système à paramètres

Dans toute cette partie, k désigne un réel quelconque.
On considère alors le système $(\mathcal{S}_k)$ de taille 2×2, dont on donne ci-dessous la représentation matricielle :

$$(\mathcal{S}_k) : \left(\begin{array}{cc|c} k^2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Q23. Discuter, selon les valeurs de k, du rang de $(\mathcal{S}_k)$.

Q24. Déterminer en fonction de k, les solutions de $(\mathcal{S}_k)$.

Partie C | Un deuxième système à paramètres

Dans toute cette partie, λ désigne un réel quelconque.

On considère alors le système $(\mathcal{S}_\lambda)$ donné ci-contre : $(\mathcal{S}_\lambda) : \begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z \end{cases}$

Q25. Donner la représentation matricielle de ce système, puis justifier que $(\mathcal{S}_\lambda)$ est compatible.

Q26. Déterminer en fonction de λ, le rang de $(\mathcal{S}_\lambda)$.

Q27. Explicitez alors les solutions de $(\mathcal{S}_\lambda)$ en fonction de λ.