Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Problème n° 1 | Jeu à la fête foraine

Soit n un entier naturel non nul.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de `pile` obtenus. Si ce nombre est pair, le jouer est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque `pile` obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque `pile` obtenu.

En particulier, s'il n'obtient aucun `pile`, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien.

La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir `pile` est égale à $p \in]0;1[$, et celle d'obtenir `face` est de $1-p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de `pile` obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie A | Étude d'une première configuration de jeu

Dans cette partie uniquement on suppose que $n = 3$ et que $p = \dfrac{2}{3}$.

Q1. Reconnaître la loi de X, puis vérifier que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.

Q 1| Éléments de réponse

Épreuve de Bernoulli : on lance une pièce et on considère comme événement succès « obtenir pile » ce qui arrive avec la probabilité $p = \dfrac{2}{3}$.

Schéma de Bernoulli : on repète 3 fois de manière indépendante cette même épreuve de Bernoulli.

Ainsi, la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est à dire X ici, lors de cette répétition, suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\dfrac{2}{3}$.

Par conséquent $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3; \dfrac{2}{3}\right)$.

Par ailleurs, comme $A = [X = 0] \cup [X = 2]$ qui est une union disjointe, il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}([X=0]) + \mathbb{P}([X=2]) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{13}{27}\end{aligned}$$

Q2. Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

Q 2| Éléments de réponse

Il est clair que pour chaque valeur de X, G ne peut prendre qu'une seule valeur et réciproquement.
Pour $X = 0$, on a $G = 0$, pour $X = 1$, on a $G = -10$, pour $X = 2$ on a $G = 20$ et pour $X = 3$ on a $G = -30$.
Ainsi, $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$.

Par ailleurs, il vient que : $\begin{cases} \mathbb{P}([G=-30]) & = & \mathbb{P}([X=3]) \\ \mathbb{P}([G=-10]) & = & \mathbb{P}([X=1]) \\ \mathbb{P}([G=0]) & = & \mathbb{P}([X=0]) \\ \mathbb{P}([G=20]) & = & \mathbb{P}([X=2]) \end{cases}$

Q3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G. Le jeu est-il favorable au jouer ?

Q 3| Éléments de réponse

G étant à support fini, G admet une espérance, qui par définition vaut :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= -30 \times \mathbb{P}([G=-30]) + (-10) \times \mathbb{P}([G=-10]) + 0 \times \mathbb{P}([G=0]) + 20 \times \mathbb{P}([G=20]) \\ &= -30 \times \mathbb{P}([X=3]) + (-10) \times \mathbb{P}([X=1]) + 20 \times \mathbb{P}([X=2]) \\ &= -30 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 10 \times 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \times 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \\ &= -\frac{60}{27} \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}(G) < 0$, le jeu est donc défavorable au joueur.

Partie B | Étude du cas général

Dans cette partie, on revient au cas général où n est un entier naturel non nul et $p \in]0;1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan « À ce jeur, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécéssaires sur p et n pour que son slogan ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = (-1)^X$. Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

Q4. On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Z(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Q 4| Éléments de réponse

Puisque $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ par construction de Y, il vient que $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
Par ailleurs, $\mathbb{P}([Z=1]) = \mathbb{P}([Y=1])$. Or $[Y=1] = [X \text{ est pair}]$ et on a $[X \text{ est pair}] = A$.
Il vient donc que Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Q5. Démontrer que $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

Q 5| Éléments de réponse

Puisque Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$, il vient que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{P}(A)$, et par linéarité de l'espérance on a donc que $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(Y) + \dfrac{1}{2}$ ce qui donne que $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

Q6. Donner la loi de X.

Q 6| Éléments de réponse

Sur le même principe que précédemment, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

Q7. En déduire que l'on a également : $\quad \mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

puis que : $\quad \mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

Q 7| Éléments de réponse

Puisque $Y = (-1)^X$ et que Y est à support fini, elle admet une espérance, donnée par le théorème du transfert :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y) & = & \mathbb{E}\left((-1)^X\right) \\ & = & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathbb{P}([X = k]) \\ & = & \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} \\ & = & (-p + 1 - p)^n \\ & = & (1-2p)^n \end{array}$$

Q8. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

Q 8| Éléments de réponse

Les deux expressions de $\mathbb{E}(Y)$ donnent donc que : $(1-2p)^n = 2\mathbb{P}(A) - 1$
ce qui amène à : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{(1-2p)^n + 1}{2}$.

Q9. Démontrer que : $\left(\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(p \leq \frac{1}{2} \text{ ou « } n \text{ est pair »}\right)$

Q 9| Éléments de réponse

On a directement que :

$$\begin{array}{rcl} \left(\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}\right) & \Leftrightarrow & \left(\frac{(1-2p)^n + 1}{2} \geq \frac{1}{2}\right) \\ & \Leftrightarrow & \left((1-2p)^n \geq 0\right) \\ & \Leftrightarrow & \left((n \text{ pair}) \text{ ou } (1 - 2p \geq 0)\right) \\ & \Leftrightarrow & \left((n \text{ pair}) \text{ ou } \left(p \leq \frac{1}{2}\right)\right) \end{array}$$

Partie C | Jeu attractif... mais rentable

Le concepteur du jeu souhaite vérifier que, tout en laissant son jeu attractif, c'est à dire en faire en sorte que $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$, son activité soit rentable pour lui, autrement dit, que le jeu soit défavorable au jeu, c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leq 0$.

Q10. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \mathbb{P}([X = k])$

Q 10| Éléments de réponse

On a : $G = 10 \times X \times \begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ pair} \\ -1 & \text{si } X \text{ impair} \end{cases}$
ce qui donne que $G = 10X \times (-1)^X$ et donc que $G = 10XY$.
G étant à support fini, elle admet une espérance qui est alors donnée par le théorème du transfert :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(G) & = & \sum_{k=1}^{n} 10k(-1)^k \mathbb{P}([X = k]) \\ & = & 10 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{array}$$

Q11. Démontrer que : $\forall k \in [\![1; n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Q 11| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)!} \\ &= n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

Q12. Montrer que $\mathbb{E}(G) = -10np\,(1-2p)^{n-1}$.

Q 12| Éléments de réponse

On a donc que : $\mathbb{E}(G) = 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

et compte-tenu de la question précédente :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= 10n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= 10n(-p)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np\,(1-2p)^{n-1} \end{aligned}$$

Q13. Démontrer alors que : $\left(\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{E}(G) \leq 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(p \leq \frac{1}{2}\right)$

Q 13| Éléments de réponse

Tout d'abord, on a :
$$\begin{aligned} (\mathbb{E}(G) \leq 0) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(-10np\,(1-2p)^{n-1} \leq 0\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left((1-2p)^{n-1} \geq 0\right) \\ &\Leftrightarrow \quad ((n \text{ est impair}) \text{ ou } (1-2p \geq 0)) \\ &\Leftrightarrow \quad \left((n \text{ est impair}) \text{ ou } \left(p \leq \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Or n ne pouvant être à al fois pair et impair, l'intersection des conditions apportées par $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(G) \leq 0$ donne bien que :
$$\left(\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{E}(G) \leq 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(p \leq \frac{1}{2}\right)$$

Q14. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right],\ f(x) = x(1-2x)^{n-1}$

Q 14| Éléments de réponse

La fonction f est clairement une fonction polynôme de degré n, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Par ailleurs, on a clairement que : $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right],\ f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx)$

Comme $1-2x \geq 0$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, il est de même pour $(1-2x)^{n-2}$ et par suite, le signe de $f'(x)$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ est exactement celui de $1-2nx$. Ainsi, les variations de f sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ sont :

x	0	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{2}$
Signe de $1-2nx$	$+$	0	$-$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f	$0 \nearrow$	$\frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$	$\searrow 0$

Q15. Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce, c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Q 15| Éléments de réponse

La rentabilité du jeu est clairement optimale pour l'organisateur lorsque l'espérance du gain pour le joueur est minimale, ce qui compte-tenu de l'expression de $\mathbb{E}(G)$ quand $f(p)$ est maximal sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, ce qui demande donc que $p = \frac{1}{2n}$.

Partie D | Étude d'une deuxième configuration de jeu

Le forain décire de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$.

En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10% qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.

Pour tout entier i compris entre 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i^{e} joueur.

On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

Q16. Pour tout i entier de $[\![1; 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

Q 16| Éléments de réponse

Puisque $n = 2$, les seuls gains possibles sont donc 0, -10 et 20.

Par suite, $G_i(\Omega) = \{-10, 0, 20\}$, et sur le même principe que précédemment : $\begin{cases} \mathbb{P}([G=-10]) &= \mathbb{P}([X=1]) \\ \mathbb{P}([G=0]) &= \mathbb{P}([X=0]) \\ \mathbb{P}([G=20]) &= \mathbb{P}([X=2]) \end{cases}$

ce qui donne que : $\begin{cases} \mathbb{P}([G=-10]) &= \frac{6}{16} \\ \mathbb{P}([G=0]) &= \frac{9}{16} \\ \mathbb{P}([G=20]) &= \frac{1}{16} \end{cases}$

puisque dans ce cas X suit $\mathcal{B}\left(2; \frac{1}{4}\right)$.

Un calcul direct donne que : $\begin{aligned} \mathbb{E}(G_i) &= -10 \times \frac{6}{16} + 20 \times \frac{1}{16} \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$

puis : $\begin{aligned} \mathbb{V}(G_i) &= \mathbb{E}(G_i^2) - (\mathbb{E}(G_i))^2 \\ &= 10^2 \times \frac{9}{16} + (20)2 \times \frac{1}{16} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \frac{225}{4} \\ &= \left(\frac{15}{2}\right)^2 \end{aligned}$

Q17. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.

Q 17| Éléments de réponse

Il est clair que $J = -\sum_{i=1}^{200} G_i$.

Q18. Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et que $\mathbb{V}(J) = 11\,250$.

Q 18| Éléments de réponse

Ainsi, par linéarité de l'espérance, il vient que $\mathbb{E}(J) = -\sum_{i=1}^{200} \underbrace{\mathbb{E}(G_i)}_{=-\frac{5}{2}}$ ce qui donne $\mathbb{E}(J) = 500$.

Les parties des différents joueurs pouvant être supposées indépendantes, l'indépendance des variables aléatoires $G_i$donne que :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(J) &= (-1)^2 \sum_{i=1}^{200} \underbrace{\mathbb{V}(G_i)}_{=\frac{225}{4}} \\ &= 11\,250 \end{aligned}$$

Q19. Justifier que $\mathbb{P}([J \leq 100]) \leq \mathbb{P}([|J-500| \geq 400])$.

Q 19| Éléments de réponse

Il est clair que : $(|J-500| \geq 400) \Leftrightarrow (J-500 \geq 400 \text{ ou } J-500 \leq -400)$
$\Leftrightarrow (J \geq 900 \text{ ou } J \leq 100)$

En particulier, il vient donc que $[J \leq 100] \subset [|J-500| \geq 400]$ ce qui amène $\mathbb{P}([J \leq 100]) \leq \mathbb{P}([|J-500| \geq 400])$.

Q20. Rappelez l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que $\mathbb{P}([J \leq 100]) \leq \frac{9}{128}$.

Q 20| Éléments de réponse

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([J \leq 100]) &\leq \mathbb{P}([|J-500| \geq 400]) \\ &\leq \frac{\mathbb{V}(J)}{400^2} \\ &= \frac{11\,250}{160000} \\ &= \frac{9}{128} \end{aligned}$$

Q21. Compte-tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Q 21| Éléments de réponse

Le forain aura intérêt à installer son stand si $\mathbb{P}([J \leq 100]) \leq 0,1$. La question précédente montre que $\mathbb{P}([J \leq 100]) \leq \frac{9}{128}$.

Or on a clairement que $\frac{9}{128} \leq \frac{9}{100} < 0,1$, et ainsi, il est pertinent d'installer le stand.

Problème n° 2 | Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. L'objet de ce problème consiste en l'étude du déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

Règle n° 1 : le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ; plus précisement, il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.

Règle n° 2 : pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon, il se déplace de manìere équiprobable vers d'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n », B_n l'évévement « le pion se trouve en B à l'étape n » et C_n l'évévement « le pion se trouve en C à l'étape n ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note par ailleurs :

$$p_n = \mathbb{P}(A_n), \quad q_n = \mathbb{P}(B_n), \quad r_n = \mathbb{P}(C_n), \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

et on désigne par M la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle que si E et F sont deux évévements avec $\mathbb{P}(F) \neq 0$, on note $\mathbb{P}(E \mid F)$ la probabilité conditionnelle de l'événement E sachant l'évévenement F.

Partie A | Préliminaire technique

On désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q22. Justifier que la matrice colonne $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice A, et préciser la valeur propre associée.

Q 22| Éléments de réponse

Il est immédiat que $AX_1 = 4X_1$ ce qui assure que X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

Q23. Étudier le rang de la matrice $A - \mathrm{I}_3$. Qu'en conclure pour le spectre de A ?

Q 23| Éléments de réponse

Il est clair que $A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et un échelonnement en lignes donne que : $\quad A - \mathrm{I}_3 \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $\mathrm{rg}\,(A - \mathrm{I}_3) = 1$, ce qui signifie que la matrice $A - \mathrm{I}_3$ n'est pas inversible, et donc que 1 est valeur propre de A.

Q24. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{X_2, X_3\}$ où $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forme une base de $\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{I}_3)$.

Q 24| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que $(A - \mathrm{I}_3)\,X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(A - \mathrm{I}_3)\,X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui assure que X_2 et X_3 sont deux vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{I}_3)$.

Par ailleurs, le théorème du rang assure que $\dim(\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{I}_3)) = 2$.

Les deux vecteurs X_2 et X_3 étant non nuls et non colinéaires, ils forment donc une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{I}_3)$.

Par suite, comme la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{I}_3)$ qui est de dimension 2, par théorème, elle en forme une base.

Q25. Justifier alors qu'il existe une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible que l'on explicitera telle que $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q 25| Éléments de réponse

D'après la question précédente, le sous-espace propre $E_1(A)$ de A est de dimension 2.
Comme 4 est valeur propre de A, on sait que le sous-espace propre $E_4(A)$ est de dimension au moins 1. Or la somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus égale à 3 puisque $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Par suite, il vient que $E_4(A)$ est de dimension 1.
Par conséquent, puisque $\dim(E_4(A)) + \dim(E_1(A)) = 3$, on en déduit que la matrice A est diagonalisable.
La matrice P dont les colonnes sont X_1, X_2 et X_3 est alors telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q26. Déterminer une matrice diagonale Δ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P\Delta P^{-1}$.

Q 26| Éléments de réponse

Il est clair que $A = 4M$, ce qui assure que : $4M = PDP^{-1}$
par suite on a : $M = P\underbrace{\left(\frac{1}{4}D\right)}_{=\Delta}P^{-1}$.

Q27. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P\Delta^n P^{-1}$.

Q 27| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $M^n = P\Delta^n P^{-1}$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : il est clair que $M^0 = \mathrm{I}_3$ et que : $$\begin{aligned} PD^0P^{-1} &= P\mathrm{I}_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$
ce qui assure que $M^0 = PD^0P^{-1}$ ce qui est bien $\mathbb{P}(\not{\vdash})$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(\backslash)$, et montrons sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
On a clairement que $M^{n+1} = M^n \times M$ et donc par hypothèse de récurrence que $M^{n+1} = PD^nP^{-1}$.
Or $M = PDP^{-1}$ ce qui amène à : $$\begin{aligned} M^{n+1} &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PD^n\mathrm{I}_3DP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$
ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout entier n.

Partie B | Étude du déplacement du pion

Pour toute la suite du problème, on admettra que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \dfrac{1}{3 \times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$.

Q28. Déterminer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1 et r_1.

Q 28| Éléments de réponse

Instant 0 **:** le pion est en A, donc $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ et $r_0 = 0$.

Instant 1 **:** soit le pion est resté en A, soit il a bougé vers B ou vers C. Ainsi, $p_1 = \frac{1}{2}$, $q_1 = \frac{1}{4}$ et $r_1 = \frac{1}{4}$ compte-tenu des règles de déplacement.

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $V_{n+1} = MV_n$.

Q 29| Éléments de réponse

Cas $n = 0$ **:** un calcul direct donne que $V_1 = MV_0$.

Cas $n \geq 1$ **:** puisque $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \underbrace{\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)}_{=\frac{1}{2}} + \mathbb{P}(B_n) \times \underbrace{\mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n)}_{=\frac{1}{4}} + \mathbb{P}(C_n) \times \underbrace{\mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)}_{=\frac{1}{4}}$$

ce qui donne : $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(C_n)$

et donc que : $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$

Sur le même principe, on pourrait établir que : x

$$q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \quad et r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n$$

Or il est immédiat que : $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n \\ \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n \end{pmatrix}$

ce qui assure que l'on a bien $V_{n+1} = MV_n$.

Q30. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = M^n V_0$.

Q 30| Éléments de réponse

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $V_n = M^n V_0$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : il est clair que $M^0 V_0 = V_0$ puisque $M^0 = \mathrm{I}_3$, ce qui assure que l'on a $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
On a vu que $V_{n+1} = MV_n$ et donc par hypothèse de récurrence, on a $V_{n+1} = M \times M^n V_0$ ce qui donne directement que $V_{n+1} = M^{n+1} V_0$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout entier n.

Q31. Déduire de ce qui précède une expression de p_n, q_n et r_n en fonction de n.

Q 31| Éléments de réponse

Puisque $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, un calcul direct donne que $M^n V_0 = \frac{1}{3 \times 4^n}\begin{pmatrix} 4^n + 2 \\ 4^n - 1 \\ 4^n - 1 \end{pmatrix}$ et par suite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n = \underbrace{\frac{4^n + 2}{3 \times 4^n}}_{=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n} \qquad q_n = \underbrace{\frac{4^n - 1}{3 \times 4^n}}_{=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n} \qquad r_n = \underbrace{\frac{4^n - 1}{3 \times 4^n}}_{=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

Q32. Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Q 32| Éléments de réponse

Puisque $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, il vient que $\left(\frac{1}{4}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$, $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$ et $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.
Ainsi, si l'on observe la position du pion pour de grandes valeurs de n, il y a autant de chances qu'il soit positionné en A, B ou C.

Partie C | Étude du nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passage du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire X_n par :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

Q33. Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ et le nombre $\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n)$.

Q 33| Éléments de réponse

$X_1 + \ldots + X_n$ est clairement le nombre de passage par le point A lors des n premiers déplacements, et $\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n)$ est le nombre moyen de passage en A lors des n premiers déplacements.

Q34. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 34| Éléments de réponse

Il est clair que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n et donc on a directement que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Q35. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Q 35| Éléments de réponse

Par définition $a_n = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n)$, donc par linéarité de l'espérance, il vient que :

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^i\right) \\
a_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^i \\
a_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^i - 1\right) \\
&= \frac{n}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) \\
&= \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Partie C | Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

- si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
- sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Le but de cette partie est de déterminer la loi de T_B et son espérance.

Q36. Calculer $\mathbb{P}([T_B = 1])$ et $\mathbb{P}([T_B = 2])$.

Q 36| Éléments de réponse

Le pion étant en A à l'instant 0, on a que $[T_B = 1] = B_1$ ce qui donne $\mathbb{P}([T_B = 1]) = \dfrac{1}{4}$.

Par ailleurs, on a : $\begin{aligned}[t] [T_B = 2] &= \overline{B_1} \cap B_2 \\ &= (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)\end{aligned}$

Comme il s'agit d'une union disjointe, il vient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([T_B = 2]) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \underbrace{\mathbb{P}(B_2 \mid A_1)}_{=\frac{1}{4}} + \mathbb{P}(C_1) \times \underbrace{\mathbb{P}(B_2 \mid C_1)}_{=\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

Q 37| Éléments de réponse

Il est immédiat que $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$ puisqu'il ne peut être qu'en A ou en C à l'instant n s'il n'est pas en B.

Q38. Établir que $\mathbb{P}\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)$ puis en déduire que $\mathbb{P}\left(B_3 \,\middle|\, \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Q 38| Éléments de réponse

On a $\overline{B_1} = A_1 \cup C_1$ et $\overline{B_2} = A_2 \cup C_2$. Ainsi, $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = (A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2)$.

Les opérations sur les ensembles donnent que : $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2)$

Cette union étant disjointe, il vient que : $B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} = (A_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup (A_1 \cap C_2 \cap B_3) \cup (C_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup (C_1 \cap C_2 \cap B_3)$

Cette union étant toujours disjointe il vient donc que :

$$\mathbb{P}\left(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B_3)}_{=\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \times \mathbb{P}(B_3 \mid A_1 \cap A_2)} + \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cap C_2 \cap B_3)}_{=\mathbb{P}(A_1 \cap C_2) \times \mathbb{P}(B_3 \mid A_1 \cap C_2)} + \underbrace{\mathbb{P}(C_1 \cap A_2 \cap B_3)}_{=\mathbb{P}(C_1 \cap A_2) \times \mathbb{P}(B_3 \mid C_1 \cap A_2)} + \underbrace{\mathbb{P}(C_1 \cap C_2 \cap B_3)}_{\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) \times \mathbb{P}(B_3 \mid C_1 \cap C_2)}$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}\left(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_1 \cap C_2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(C_1 \cap A_2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(C_1 \cap C_2)$$

et donc que : $\mathbb{P}\left(B_3 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap C_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap C_2)\right)$

et comme on a $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap C_2)$, il vient que :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap C_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right)$$

ce qui conduit bien à $\mathbb{P}\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)$.

Par ailleurs on a directement que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(B_3 \,\middle|\, \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\mathbb{P}\left(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right)}{\mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Q39. Pour tout ce qui suit, on admet la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(B_{n+1} \,\middle|\, \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Q 39| Éléments de réponse

Q40. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}([T_B = k])$. Que vaut $\mathbb{P}([T_B = 0])$?

Q 40| Éléments de réponse

On a que $[T_B = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \cap B_k$. Il vient alors que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([T_B = k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \times \mathbb{P}\left(B_k \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right) \\ &= \frac{1}{4}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}\right)\end{aligned}$$

Or on a que : $\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} = \mathbb{P}([T_B \geq k])$.

Il vient donc que : $\mathbb{P}([T = k]) = \frac{1}{4}\mathbb{P}([T_B \geq k])$.

Or on a que : $[T_B \geq k] = [T_B = k] \cup [T_B \geq k+1]$

Par suite, il vient que : $\mathbb{P}([T_B = k]) = \mathbb{P}([T_B \geq k]) - \mathbb{P}([T_B \geq k+1])$

ce qui donne : $\mathbb{P}([T_B = k]) = 4\mathbb{P}([T_B = k]) - 4\mathbb{P}([T_B = k+1])$

ce qui amène que : $\mathbb{P}([T_B = k+1]) = \frac{3}{4}\mathbb{P}([T_b = k])$

La suite de terme général $\mathbb{P}([T_B = k])$ est alors une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $\mathbb{P}([T_B = 1]) = \frac{1}{4}$, ce qui donne que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([T_B = k]) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

Par suite, il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([T_B = 0]) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_B = k]) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Q41. Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

Q 41| Éléments de réponse

Puisque $\mathbb{P}([T_B = 0]) = 0$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([T_B = k]) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4}$

il vient que T_B suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$, ce qui assure que T_B admet une espérance qui vaut 4.