Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Préambule | Consignes générales

Q1. Réaliser l'entête de votre devoir en respectant les éléments suivants : inscrire en haut à gauche de la première copie double, vos nom (en majuscules) et prénom tels qu'ils figurent sur votre dossier d'inscription en commençant au plus à 1 cm du bord gauche de la feuille et au plus à 3 cm du bord supérieur de la feuille, puis au même niveau sur la partie droite de la page, inscrire la date du devoir au format JJ-MM-AAAA ; en sautant une ligne, sous votre nom, inscrire « CPGE-BL 1^{e}année » ; en laissant un espacement d'environ 2 cm par rapport à la dernière ligne écrite, inscrire en toutes lettres, et en respectant la casse, « Devoir Surveillé n° 13 » au centre de la ligne ; pour finir, laisser un espacement d'environ 2 cm par rapport à cette dernière ligne, tirer un trait horizontal sur la totalité de la largeur de la page, tourner ensuite la page, et commencer par le premier problème ou exercice en commençant en haut de la page.

Q 1| Éléments de réponse

Sans commentaire. . .

Problème n° 1 | Déclinaison autour des travaux de vacances

Pour chacune des questions ci-dessous, il est demandé de détailler les calculs.

Q2. Écrire le plus simplement possible l'expression $A = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+2}\right) - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}+2}\right)$.

Q 2| Éléments de réponse

Les propriétés opératoires du logarithme permettent d'écrire que :

$$\begin{aligned} A &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+2}\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{e}+2}{\mathrm{e}^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}\,(\mathrm{e}+1)\,(\mathrm{e}+2)}{(\mathrm{e}+1)\,(\mathrm{e}+2)\times \mathrm{e}^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \\ &= -\ln(\mathrm{e}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Q3. Montrer que : $\forall x \in]1;+\infty[\,,\ \ln\left(x^2-1\right) - \ln\left(x^2+2x+1\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Q 3| Éléments de réponse

On a directement que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1;+\infty[\,,\ \ln\left(x^2-1\right) - \ln\left(x^2+2x+1\right) &= \ln\left((x-1)(x+1)\right) - \ln\left((x+1)^2\right) \\ &= \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

Q4. a est un nombre réel différent de 1 tel que $a^6 = 1$.
Que vaut le nombre $B = a^8 - 3a^7 + 4a^6 - a^2 + 3a - 1$?

Q 4| Éléments de réponse

Puisque $a^6=1$, il vient que $a^7=a$ et que $a^8=a^2$, ce qui amène à :

$$\begin{aligned} B &= a^8-3a^7+4a^6-a^2+3a-1 \\ &= a^2-3a+4+3a-1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Q5. a est un nombre réel différent de 1 tel que $a^6=1$. Que vaut la somme $S_0=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5$?

Q 5| Éléments de réponse

On remarque que $S_0=\sum_{k=0}^{5} a^k$, et comme $a\neq 1$, on peut écrire que : $\quad S_0=\dfrac{1-a^{5+1}}{1-a}$.
Comme $a^6=1$, on en déduit que $S_0=0$.

Problème n° 2 | Un peu de technique avec les systèmes linéaires

Q6. On considère le système $(\mathcal{S}_0)$ de taille 3×3 ci-contre : $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x+y-\ z=-6 \\ 2x+y-2z=-9 \end{cases}$.

On donne ci-dessous l'ensemble des opérations élémentaires nécessaires à la résolution par échelonnement réduit en lignes du système $(\mathcal{S}_0)$. Reproduire pas à pas ces dernières de sorte à expliciter les solutions du système $(\mathcal{S}_0)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & -2 & -9 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3-1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-5L_3 \\ L_1\leftarrow L_1+2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \underset{L_1\leftarrow L_1+\frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3\leftarrow -1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

Q 6| Éléments de réponse

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & -2 & -9 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -12 \\ 0 & 3 & -6 & -15 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-5L_3 \\ L_1\leftarrow L_1+2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1+\frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3\leftarrow -1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Par suite, le système $(\mathcal{S}_0)$ admet pour unique solution le triplet $(2,1,3)$.

Q7. On considère trois systèmes linéaires $(\mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{S}_2)$ et $(\mathcal{S}_3)$, pour lesquels on a procédé à un échelonnement en lignes de leur représentation matricielle que l'on donne ci-après après échelonnement :

$$(\mathcal{S}_1) : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (\mathcal{S}_2) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (\mathcal{S}_3) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Pour chacun d'entre eux, sans calculs supplémentaires et en le justifiant, donner leur rang et leur nombre de solutions.

Q 7| Éléments de réponse

Système $(\mathcal{S}_1)$ **:** on identifie les pivots sur l'échelonnée du système : $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Ils sont au nombre de 2, donc le rang du système est de 2.
Le système possède une équation de comptabilité de la forme « $0 = 0$ » ce qui assure que le système est compatible.
Comme il s'agit d'un système de taille 3×3 de rang 2, on sait par théorème qu'il ne peut pas admettre une unique solution. Par suite, ce dernier, étant compatible, il admet une infinité de solutions.

Système $(\mathcal{S}_2)$ **:** on identifie les pivots sur l'échelonnée du système : $(\mathcal{S}_2) : \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$

Ils sont au nombre de 3, donc le rang du système est de 3.
Ainsi, $(\mathcal{S}_2)$ est un système 3×3 de rang 3, donc par théorème, il admet une unique solution.

Système $(\mathcal{S}_3)$ **:** on identifie les pivots sur l'échelonnée du système : $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Ils sont au nombre de 2, donc le rang du système est de 2.
Le système possède une équation de comptabilité de la forme « $0 = -1$ » ce qui assure que le système est incompatible, et par suite qu'il n'admet pas de solution.

Q8. Résoudre à l'aide d'un échelonnement réduit en lignes le système 3×4 ci-dessous, en précisant son rang :

$$(\mathcal{S}_4) : \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + t = -1 \\ -x + y - z + t = 4 \end{cases}$$

Q 8| Éléments de réponse

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

Les solutions de $(\mathcal{S}_4)$ sont donc les $4-$uplets (x,y,z,t) construits à l'aide des relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rclll} x & = & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} & t \\ y & = & 2 & - & t \\ z & = & -\dfrac{5}{3} & +\dfrac{2}{3} & t \end{array}\right., \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Q9. On considère trois systèmes linéaires $(\mathcal{S}_5)$, $(\mathcal{S}_6)$ et $(\mathcal{S}_7)$, pour lesquels on a réalisé une succession d'opérations élémentaires sur leur représentation matricielle pour obtenir les matrices augmentées ci-dessous.

$$(\mathcal{S}_5) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad (\mathcal{S}_6) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad (\mathcal{S}_7) : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En poursuivant éventuellement l'échelonnement réduit en lignes partiellement réalisé, expliciter les solutions de ces trois systèmes.

Q 9| Éléments de réponse

Pour le système $(\mathcal{S}_5)$: le système n'est pas encore mis sous forme échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, les solutions du système $(\mathcal{S}_5)$ sont les $4-$uplets (x,y,z,t) décrits par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rclll} x & = & 1 & - & z \\ y & = & -2 & - & z \\ z & = & & & z \\ t & = & 0 & & \end{array}\right., \text{ où } z \in \mathbb{R}$$

Pour le système $(\mathcal{S}_6)$: le système est clairement mis sous forme échelonnée réduite. Par suite, les solutions du système $(\mathcal{S}_6)$ sont les $4-$uplets (x,y,z,t) décrits par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rclll} x & = & 1 & - & z \\ y & = & 1 & - & z \\ z & = & & & z \\ t & = & 0 & & \end{array}\right., \text{ où } z \in \mathbb{R}$$

Pour le système $(\mathcal{S}_7)$: le système n'est pas encore mis sous forme échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, les solutions du système $(\mathcal{S}_6)$ sont les $4-$uplets (x,y,z,t) décrits par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rclllll} x & = & 3 & - & 2z & & \\ y & = & -2 & - & z & + & t \\ z & = & & & z & & \\ t & = & 0 & & & & t \end{array}\right., \text{ où } z \in \mathbb{R}$$

Problème n° 3 | Un peu de technique avec les sommes finies

Pour chacune des questions ci-dessous, il est demandé de détailler les calculs.
Dans tout ce qui suit et sauf précision supplémentaire, n désignera un élément de $\mathbb{N}^*$.

On pourra admettre le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Partie A | Autour des sommes de référence

Q10. Déterminer la valeur de la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{k=3}^{15}(3k+2)$.

Q 10| Éléments de réponse

Par linéarité de la somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=3}^{15}(3k+2) \\
&= 3\sum_{k=3}^{15} k + \sum_{k=3}^{15} 2 \\
&= 3\left[\sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{2} k\right] + \underbrace{(15-3+1)}_{\substack{\textbf{nombre de termes}\\ \textbf{de la somme}}} \times 2 \\
&= 3\left[\frac{15\times(15+1)}{2} - \frac{2\times(2+1)}{2}\right] + 13\times 2 \\
&= 3\left[\frac{15\times 16}{2} - \frac{2\times 3}{2}\right] + 26 \\
&= 3\,(15\times 8 - 3) + 26 \\
&= 3\,(120-3) + 26 \\
&= 3\times 120 - 9 + 26 \\
&= 360 + 17 \\
&= 377
\end{aligned}$$

Q11. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(2^k\right) = \frac{\ln(2)n(n+1)}{2}$.

Q 11| Éléments de réponse

Les propriétés opératoires du logarithme puis la linéarité de la somme permettent d'écrire directement que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(2^k\right) &= \sum_{k=1}^{n} k\ln(2) \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \ln(2)\times\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Q12. Expliciter en fonction de n la valeur de la somme $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} 2^n$.

Q 12| Éléments de réponse

On remarquera que le terme général de la somme est 2^n, et que ce dernier ne dépend pas de l'indice de sommation de cette somme. Il vient donc :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{8} 2^n \\ &= 2^n \times \underbrace{(8-1+1)}_{\substack{\textbf{nombre de termes}\\ \textbf{de la somme}}} \\ &= 2^n \times 8 \\ &= 2^n \times 2^3 \\ &= 2^{n+3} \end{aligned}$$

Q13. La formule suivante est-elle correcte ? Justifier votre réponse.

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^{n-1}-1}{2^n}$$

Q 13| Éléments de réponse

En revenant à une indexation à 0, il vient que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 2\left(1-\frac{1}{4}\right) \\ &= 2 - 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2 + 2\times\frac{1}{4} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ &= \frac{2^{n-1}-1}{2^n} \end{aligned}$$

Partie B | Opérations avec les sommes

Q14. À l'aide du changement d'indice $i = k+2$, calculer la valeur de la somme $S_3 = \sum_{k=4}^{11} (3k+6)$.

Q 14| Éléments de réponse

Le changement d'indice $i = k + 2$ donne, puisque $k \in [\![4;11]\!]$, que $i \in [\![6;13]\!]$. Par suite, il vient :

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{k=4}^{11} (3k+6) \\
&= \sum_{i=6}^{13} (3\,(i-2)+6) \\
&= \sum_{i=6}^{13} (3i-6+6) \\
&= \sum_{i=6}^{13} 3i \\
&= 3\sum_{i=6}^{13} i \\
&= 3\left[\sum_{i=1}^{13} i - \sum_{i=1}^{5} i\right] \\
&= 3\left[\frac{13\times(13+1)}{2} - \frac{5\times(5+1)}{2}\right] \\
&= 3\left[\frac{13\times 14}{2} - \frac{5\times 6}{2}\right] \\
&= 3\,(13\times 7 - 5\times 3) \\
&= 3\,(91-15) \\
&= 3\times 76 \\
&= 228
\end{aligned}$$

Q15. Expliciter, en fonction de n, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - k\right)$ en donnant le résultat sous forme d'un quotient de produits de termes de degré au plus 1 en n.

Q 15| Éléments de réponse

Par linéarité de la somme, il vient que :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2n+1-3}{3} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2n-2}{3} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2(n-1)}{3} \\
&= \frac{n(n-1)(n+1)}{3}
\end{aligned}$$

Q16. On admet que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ \dfrac{2}{k^3-k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{2}{k} + \dfrac{1}{k+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Expliciter en fonction de n, la valeur de la somme $\Delta_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^3-k}$.

On pourra par exemple remarquer que $2 = 1 + 1$.

Q 16| Éléments de réponse

Par linéarité de la somme, il vient que :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^3-k}\\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n}\left[\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\right]\\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{2-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Partie C | Un calcul de somme

L'objet de cette partie est de calculer la somme $\Gamma_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2$.

Q17. Explicitez, sans la calculer la somme Γ_4.

Q 17| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $\Gamma_4 = -1+4-9+16-25+36-49+64$.

Q18. Justifier que l'on a : $\Gamma_n = 4\sum_{p=1}^{n} p^2 - \sum_{p=1}^{n}(2p-1)^2$.

Q 18| Éléments de réponse

En regroupant les indices de sommations par parité, on peut écrire que :

$$\Gamma_n = \sum_{\substack{k\in[\![1;2n]\!]\\ k \textbf{ pair}}}(-1)^k k^2 + \sum_{\substack{k\in[\![1;2n]\!]\\ k \textbf{ impair}}}(-1)^k k^2$$

Ainsi, il vient que : $\Gamma_n = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{2p}(2p)^2 + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{(2p-1)}(2p-1)^2$

ce qui amène alors à : $\Gamma_n = \sum_{p=1}^{n} 4p^2 - \sum_{p=1}^{n}(2p-1)^2$

et finalement à : $\Gamma_n = 4\sum_{p=1}^{n} p^2 - \sum_{p=1}^{n}(2p-1)^2$

Q19. Déterminer alors l'expression de Γ_n en fonction de n.

Q 19| Éléments de réponse

On poursuit le calcul précédent :

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= 4\sum_{p=1}^{n} p^2 - \sum_{p=1}^{n}\left(4p^2-4p+1\right)\\ &= 4\sum_{p=1}^{n} p^2 - 4\sum_{p=1}^{n} p^2 + 4\sum_{p=1}^{n} p - \sum_{p=1}^{n} 1\\ &= 4\times\frac{n(n+1)}{2} - n\times 1\\ &= 2n(n+1)-n\\ &= 2n^2+2n-n\\ &= 2n^2+n\end{aligned}$$

Problème n° 4 | Équations et systèmes à paramètres

Partie A | Équation de degré 2 à paramètres

Dans cette partie, m désigne un réel quelconque.
On considère alors l'équation (E_m) ci-contre : $(E_m) : (m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$.

Q20. Résoudre (E_{-3}).

Q 20| Éléments de réponse

Il est clair que E_{-3} est : $(E_{-3}) : -16x=0$
Et il est immédiat que (E_{-3}) n'admet que 0 pour solution.

Q21. Résoudre l'équation (E_3).

Q 21| Éléments de réponse

Il est clair que (E_3) est : $(E_3) : 6x^2+20x+6=0$.
Il s'agit d'une équation de degré 2 en x dont le discriminant Δ vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= 20^2-4\times 6\times 6\\ &= 400-144\\ &= 256\end{aligned}$$

Comme $\Delta>0$, (E_3) admet donc deux solutions réelles, qui sont :

$$x_1=\frac{-20+\sqrt{256}}{2\times 6} \text{ et } x_2=\frac{-20-\sqrt{256}}{2\times 6}$$

Puisque $\sqrt{256}=16$, il vient alors que $x_1=-\dfrac{1}{3}$ et $x_2=-3$.

Q22. On suppose dans toute la suite de cette partie que $m\neq -3$.
Justifier que (E_m) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $m\in\,]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$.

Q 22| Éléments de réponse

Puisque $m \neq -3$, (E_m) est une équation de degré 2 en x, dont le discriminant Δ_m vaut :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_m & = & 4\,(3m+1)^2 - 4\,(m+3)^2 \\ & = & 4\left(9m^2+6m+1\right) - 4\left(m^2+6m+9\right) \\ & = & 36m^2+24m+4-4m^2-24m-36 \\ & = & 32m^2-32 \\ & = & 32\left(m^2-1\right) \\ & = & 32\,(m-1)\,(m+1) \end{array}$$

L'existence ou non de solutions réelles d'une équation de degré 2 est donné par le signe de son discriminant.
Il est immédiat ici que Δ_m étant aussi une expression de degré 2 en m qui s'annule trivialement en $m = \pm 1$ et dont le coefficient dominant est $32 > 0$, il vient que le signe de Δ_m est donné par :

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de Δ_m		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, (E_m) admet des solutions réelles si, et seulement si, $m \in \left]-\infty;-1\right] \cup \left[1;+\infty\right[$.

Partie B | Un premier système à paramètres

Dans toute cette partie, k désigne un réel quelconque.
On considère alors le système $(\mathcal{S}_k)$ de taille 2×2, dont on donne ci-dessous la représentation matricielle :

$$(\mathcal{S}_k) : \left(\begin{array}{cc|c} k^2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Q23. Discuter, selon les valeurs de k, du rang de $(\mathcal{S}_k)$.

Q 23| Éléments de réponse

On détermine le rang de $(\mathcal{S}_k)$ par échelonnement en ligne de sa représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{cc|c} k^2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ k^2 & 1 & k \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - k^2 L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k^2 & k-k^2 \end{array}\right)$$

Le rang du système $(\mathcal{S}_k)$ est donné par le nombre de pivots (non nuls) de l'échelonnée obtenue précédemment : $\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1-k^2} & k-k^2 \end{array}\right)$

Il est immédiat que l'on a : $\left(1-k^2=0\right) \quad \Leftrightarrow \quad (k \in\in \{-1,1\})$.
Par suite :

Si $k \in \{-1,1\}$**, alors** le rang du système $(\mathcal{S}_k)$ est 1.

Si $k \notin \{-1,1\}$**, alors** le rang du système $(\mathcal{S}_k)$ est 2.

Q24. Déterminer en fonction de k, les solutions de $(\mathcal{S}_k)$.

Q 24| Éléments de réponse

En reprenant l'échelonnement précédent, il vient les trois cas suivants :

Si $k = 1$ **:** dans ce cas on a en fait que : $(\mathcal{S}_1) : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

et donc $(\mathcal{S}_1)$ est compatible, et les couples solutions de $(\mathcal{S}_1)$ sont les couples (x,y) décrits par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 - y \\ y & = & y \end{array}\right. \text{, où } y \in \mathbb{R}$$

Si $k=-1$ **:** dans ce cas on a en fait que : $(\mathcal{S}_{-1}) : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$

et $(\mathcal{S}_{-1})$ présente une équation de compatibilité de la forme « $0=-2$ » qui conduit ainsi au fait que $(\mathcal{S}_{-1})$ est un système incompatible.

Si $k \notin \{-1,1\}$ **:** dans ce cas, $(\mathcal{S}_k)$ est un système 2×2 de rang 2, donc par théorème, il admet une unique solution, que l'on obtient en poursuivant l'échelonnement précédent étant donné que $1-k^2 \neq 0$.

$$(\mathcal{S}_k) \sim_L \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k^2 & k-k^2 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{1-k^2} L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{k}{k+1} \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{k+1} \\ 0 & 1 & \frac{k}{k+1} \end{array}\right)$$

et par conséquent $(\mathcal{S}_k)$ admet comme unique solution le couple $\left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{k}{k+1}\right)$.

Partie C | Un deuxième système à paramètres

Dans toute cette partie, λ désigne un réel quelconque.

On considère alors le système $(\mathcal{S}_\lambda)$ donné ci-contre : $(\mathcal{S}_\lambda) : \begin{cases} 4x+y+z=\lambda x \\ x+4y+z=\lambda y \\ x+y+4z=\lambda z \end{cases}$

Q25. Donner la représentation matricielle de ce système, puis justifier que $(\mathcal{S}_\lambda)$ est compatible.

Q 25| Éléments de réponse

Il est immédiat que : $(\mathcal{S}_\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)x+y+z=0 \\ x+(4-\lambda)y+z=0 \\ x+y+(4-\lambda)z=0 \end{cases}$

On en déduit que la représentation matricielle de $(\mathcal{S}_\lambda)$ est alors $\left(\begin{array}{ccc|c} 4-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 0 \end{array}\right)$

et on remarque qu'il s'agit d'un système linéaire homogène, donc par théorème, il est compatible puisque la solution triviale $(0,0,0)$ est solution.

Q26. Déterminer en fonction de λ, le rang de $(\mathcal{S}_\lambda)$.

Q 26| Éléments de réponse

On procède à un échelonnement en lignes de la représentation matricielle de $(\mathcal{S}_\lambda)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 0 \\ 4-\lambda & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (4-\lambda) L_1}}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ 0 & -3+\lambda & -15+8\lambda-\lambda^2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -18+9\lambda-\lambda^2 & 0 \end{array}\right)$$

Le rang de $(\mathcal{S}_\lambda)$ étant égal au nombre de pivots non nuls de cette dernière échelonnée qui sont potentiellement $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{3-\lambda} & -3+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-18+9\lambda-\lambda^2} & 0 \end{array}\right)$ il s'agit dans un premier de déterminer les cas d'annulation des expressions $3-\lambda$ et $-\lambda^2+9\lambda-18$. Il est immédiat que $3-\lambda$ s'annule uniquement en $\lambda=3$, et que $-\lambda^2+9\lambda-18$ étant une expression polynomiale de degré 2 en λ, cette dernière s'annulera en $\lambda=3$ ou $\lambda=6$.

Il vient alors les discussions suivantes :

Si $\lambda = 3$**, alors** dans ce cas on a $(\mathcal{S}_3) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ce qui assure que $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 1.

Si $\lambda = 6$**, alors** dans ce cas on a $(\mathcal{S}_6) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ce qui assure que $(\mathcal{S}_{-3})$ est de rang 2.

Si $\lambda \notin \{3, 6\}$ alors tous les termes diagonaux de la dernière échelonnée sont non nuls, et donc que $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 3.

Q27. Explicitez alors les solutions de $(\mathcal{S}_\lambda)$ en fonction de λ.

Q 27| Éléments de réponse

En reprenant les éléments de discussions précédents, il vient :

Si $\lambda = 3$ **:** on a alors : $(\mathcal{S}_3) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Par suite, les solutions de $(\mathcal{S}_3)$ sont les triplets (x, y, z) donnés par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -y & - & z \\ y & = & y & & \\ z & = & & & z \end{array}\right., \text{ où } (y, z) \in \mathbb{R}^2$$

Si $\lambda = 6$ **:** on a alors :

$$(\mathcal{S}_6) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, les solutions de $(\mathcal{S}_6)$ sont les triplets (x, y, z) donnés par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \end{array}\right., \text{ où } z \in \mathbb{R}$$

Si $\lambda \notin \{3, 6\}$ **:** on sait que dans ce cas le rang de $(\mathcal{S}_\lambda)$ est égal à 3. Il s'agit donc d'un système 3×3 de rang 3, donc par théorème, il admet une unique solution.
Or comme il s'agit d'un système compatible, ce dernier admet le triplet $(0, 0, 0)$ comme solution. Par conséquent, ce dernier est la seule solution au système $(\mathcal{S}_\lambda)$.