Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Problème n° 1 | Étude de fonctions

On considère les fonctions f et g données par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2 \mathrm{e}^{x} - \sin(x) + x}{\ln(1+x) - x} \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \ln(1+x) - x$$

Partie A | Étude du comportement asymptotique de g

Q1. Justifier que le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de la fonction g est $]-1;+\infty[$.

Q2. Déterminer la limite de g en -1. Interpréter graphiquement le résultat.

Q3. En remarquant que : $\forall x \in \,]-1;+\infty[\setminus\{0\}\,,\ \ln(1+x) = \ln\left(x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$
déterminer la limite de g en $+\infty$.

Q4. Justifier que le quotient $\dfrac{g(x)}{x}$ admet une limite finie notée ℓ en $+\infty$, et la déterminer.

Q5. Comment interpréter graphiquement la limite de la différence $g(x) - \ell x$ quand x tend vers $+\infty$?

Partie B | Étude des variations de g

Q6. Justifier que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$, puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_g$.

Q7. Construire, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction g sur $\mathcal{D}_g$.

Q8. Explicitez le signe de g sur $\mathcal{D}_g$.

Q9. Construire dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative de la fonction g, ses éventuelles asymptotes, la droite d'équation $y = \ell x$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie C | Étude du comportement de f en 0

Q10. Déterminer le domaine $\mathcal{D}_f$ de définition de f.

Q11. Justifier que l'on a : $\ln(1+x) - x = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$
puis montrer que : $\dfrac{1}{\ln(1+x) - x} = -\dfrac{2}{x^2}\left(1 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{18}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)$

Q12. Former le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{x} - \sin(x) + x$

Q13. En déduire que : $f(x) = -2 - \dfrac{11}{3}x - \dfrac{22}{9}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$

Q14. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 en précisant la valeur du prolongement en 0, puis que ce prolongement noté $\tilde{f}$ est dérivable en 0.

Q15. Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ en 0 de $\tilde{f}$, et préciser la position relative de $\mathcal{T}_0$ par rapport à la courbe représentative de la fonction $\tilde{f}$ au voisinage de 0.

Problème n° 2 | Un paradoxe

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est à dire pour laquelle, à chaque lancer, les probabilités d'apparition de « pile » et de « face » sont égales à $\frac{1}{2}$. On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent avec les règles suivantes :

- le joueur J_1 est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- le joueur J_2 est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse.

étant entendu que lorsque l'on parle de configuration « pile, pile, face » ou « face, pile, pile », il s'agit du résultat de trois lancers consécutifs.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J_2 possède un net avantage sur le ljouer J_1.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n lévénement « on obtient pile au n^{e}lancer » et B_n l'événement « on obtient face au n^{e}lancer ».

De plus, pour tout entier naturel $n \geq 3$, on note G_n l'événement « le joueur J_1 est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n » et g_n la probabilité de G_n.

Partie A | Préliminaire technique

Dans tout ce paragraphe, on désigne par E le sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles défini par :

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} ,\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \right\}$$

On désigne par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites dont le terme général est donné ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n \text{ et } \beta_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

Q16. Montrer que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Q17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle si, et seulement si, $u_0 = u_1 = 0$.

Q18. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois éléments de E. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = 0$$

Q19. Démontrer que les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.

Q20. Établir que la famille formée par les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une famille libre de E.

Q21. Justifier alors que E est de dimension 2.

Partie B | Étude du jeu

Q22. Justifier, pour tout entier $n \geq 3$, l'égalité $G_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_n$. En déduire g_n.

Q23. En déduire la probabilité que le joueur J_1 soit déclaré gagnant.

Q24. Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par d_n la probabilité que lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs.

Préciser d_1 et d_2.

Q25. En considérant les résultats des lancers de rang $n+1$ et $n+2$, justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité suivante :

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$$

Q26. Justifier l'existence de deux constantes réelles α et β que l'on ne cherchera pas à calculer telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, d_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n$$

Q27. En déduire que la série $\sum d_n$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

Q28. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement « aucun des deux joueurs n'a été déclaré vainqueur pendant les n premiers lancers ».

Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $\mathbb{P}(C_n) = \dfrac{1}{2^n} + d_n$.

Q29. Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

Q30. Calculer la probabilité que le joueur J_2 soit gagnant et conclure.

Q31. Montrer que l'on peut définir une variable aléatoire T qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant.

Q32. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a l'égalité suivante : $\mathbb{P}([T_n = n]) = \dfrac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.

Q33. Montrer que la variable T possède une espérance et que : $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=2}^{+\infty} d_n + 2d_2$

Q34. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

Problème n° 3 | Le Monty Hall

Soient n et p deux entiers non nuls tels que $p \leq \dfrac{n}{3}$.

Pour le tirage d'une tombola, on dispose dans une urne n tickets numérotés de 1 à n dont seulement p sont « gagnants » et connus à l'avance par l'organisateur du jeu, les $n-p$ autres tickets étant bien évidemment « perdants ».

Un joueur achète successivement p tickets, choisis au hasard.

Le meneur de jeu dévoile ensuite p numéros perdants parmi les $n-p$ numéros restants qu'il retire de l'urne et propose au joueur deux stratégies :

1e **stratégie :** le joueur garde ses p numéros ;

2e **stratégie :** le joueur échange ses tickets contre p nouveaux numéros, choisis au hasard parmi les $n-2p$ restants dans l'urne.

Le but de ce problème est de déterminer dans deux cas particuliers, laquelle des deux stratégies permet d'obtenir le plus de numéros gagnants.

Pour $1 \leq i \leq p$, on note X_i (resp. Y_i) la variable aléatoire qui vaut 1 si le ie numéro pioché (lors de la 1e phase de pioche) est gagnant et 0 sinon (resp. lors de la seconde phase de pioche, dans le cadre de la deuxième stratégie).

On note A (resp. B) le nombre de numéros gagnants choisis avec la première stratégie (resp. avec la deuxième).

Par ailleurs, on rappelle que si l'on considère deux événements E et F avec $\mathbb{P}(F) \neq 0$, on notera $\mathbb{P}(E \mid F)$ la probabilité conditionnelle de l'événement E sachant l'événement F.

Partie A | Cas $n = 3$ et $p = 1$

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 3$ et $p = 1$.

Q35. Déterminer la loi de A.

Q36. Que vaut ici $\mathbb{P}([Y_1 = 1] \mid [X_1 = 0])$? En déduire la loi de B.

Q37. Expliciter $\mathbb{E}(A)$ et $\mathbb{E}(B)$.

Q38. Quelles stratégie semble alors la plus avantageuse ?

Partie B | Cas $n \geq 6$ et $p = 2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n \geq 6$ et $p = 2$.

Q39. Déterminer la loi de X_1.

Q40. Expliciter la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X_1, X_2).

Q41. En déduire la loi marginale de X_2.

Q42. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Q43. En déduire la loi de A, puis son espérance.

Q44. On admet que Y_1 et Y_2 suivent toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2 - \mathbb{E}(A)}{n-4}$.
Démontrer que $\mathbb{E}(B) = \dfrac{4(n-2)}{n(n-4)}$.

Q45. Conclure.