Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Étude d'une famille de fonctions pour un calcul de somme de série

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n et h_n respectivement, les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \ln(1+x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h_n : \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n\ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1} \end{array} \right.$$

Partie A | Étude du signe de la fonction h_n

Q1. Déterminer les limites de h_n aux bornes de son ensemble de définition.

Q2. Dresser le tableau de variation de la fonction h_n sur son ensemble de définition en y précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Q3. Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ d'inconnue x, admet sur $]-1;+\infty[$ un unique solution x_0 que l'on déterminera.

Q4. En déduire le signe de la fonction h_n sur $]-1;+\infty[$.

Partie B | Étude du cas où $n = 1$

Dans cette partie, on étudie le cas particulier où $n = 1$.

Q5. Préciser les limites de f_1 aux bornes de son ensemble de définition.

Q6. Dresser le tableau de variation de la fonction f_1 sur son ensemble de définition.

Partie C | Étude du cas général pour $n \geq 2$

Dans cette partie, on étudie le cas général où $n \geq 2$.

Q7. On note f_n' la dérivée de la fonction f_n.
Exprimer pour tout $x > -1$, $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

Q8. En distinguant les cas n impair et n pair, en déduire les variations de la fonction f_n sur $]-1;+\infty[$

Partie D | Étude d'une suite définie par une intégrale et somme d'une série

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Par ailleurs, pour tout $x \in [0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

Q9. Montrer qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera, tel que :

$$\forall x \in [0;1]\,,\ \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

Q10. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

Q11. À l'aide d'une intégration par parties, en déduire la valeur de u_1.

Q12. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

Q13. Établir l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln(2)}{n+1}$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Q14. Établir la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0;1]\,,\ S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

Q15. En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Q16. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

Problème n° 2 | Matrices inversibles semblables à leur inverse

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de ce problème est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes entre elles.

Pour l'ensemble de ces parties, on désigne par $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle par ailleurs que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

Partie A | Premier exemple

On considère l'endomorphsime f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Q17. Montrer que A est inversible. Que peut-on en déduire pour f ?

Q18. On considère la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où l'on a : $\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & 2e_1 + e_2 \\ u_2 & = & e_1 \\ u_3 & = & e_1 + e_3 \end{array}\right.$.

Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q19. Déterminer les images par f des vecteurs de la famille $\mathcal{C}$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{C}$.

Q20. Déterminer alors la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$.

Q21. Justifier que la matrice D est inversible, puis en donner son inverse.

Q22. On désigne par P la matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{C}$. Quel lien y-a-t-il entre A, D et P.

Q23. On désigne alors par Q la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.

Q24. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B | Deuxième exemple

On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, -z, y + 2z) \end{array} \right.$$

On notera M la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
On désigne par u_1 et u_2 les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u_1 = e_1$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

Q25. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q26. Explicitez la matrice M.

Q27. f est-il un automorphisme ?

Q28. Démontrer que l'endomorphisme $g = f - \mathrm{Id}$, où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$, est de rang 1.

Q29. Démontrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(g)$.

Q30. Déterminer un vecteur $u_3 = (1, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que l'on ait : $f\,(u_3) - u_3 = u_2$.

Q31. Montrer que la famille $\mathcal{C}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q32. Sans calculs supplémentaires, justifier que la famille $\mathcal{C}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

Q33. Déterminer la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{C}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{C}_2$.

Q34. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, puis calculer $M_1 M_2$.

Q35. En déduire que M et M^{-1} sont inversibles.

Problème n° 3 | Calcul de la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

On admettra le résultat suivant : $\forall x \in \left]0;1\right],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\,(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Partie A | Calcul préliminaire

Q36. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right) \cos\,(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}$$

Partie B | Lemme de Lebesgues pour une fonction g donnée

Dans cette partie, on considère g la fonction définie par :

$$g : \left| \begin{array}{ccl} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\dfrac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} & \text{si} \quad x \in]0;\pi] \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Q37. Déterminer la limite de g en 0. Qu'en conclure pour g ?

Q38. On admet que la fonction g est dérivable sur $[0;\pi]$ et que g' est dérivable sur $[0;\pi]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'on a :

$$\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\left(g(0) - g(\pi)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) + \int_0^{\pi} g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right)$$

Q39. Justifier qu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que : $\left|g(0) - g(\pi)\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)\right| \leq 2K.$

Q40. Justifier qu'il existe un réel $K' \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\displaystyle\int_0^{\pi} g'(x)\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right| \leq K'\pi.$

Q41. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Partie C | Somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

L'objet de cette partie est de calculer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Q42. Rappeller pourquoi la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.

Q43. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x.$

Q44. Montrer alors que la somme de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.