Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Problème n° 1 | Étude de fonctions

On considère les fonctions f et g données par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2 \mathrm{e}^{\,x} - \sin(x) + x}{\ln(1+x) - x} \quad \text{et } g : x \longmapsto \ln(1+x) - x$$

Partie A | Étude du comportement asymptotique de g

Q1. Justifier que le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de la fonction g est $]-1;+\infty[$.

Q 1| Éléments de réponse

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ étant définie sur $]0;+\infty[$, l'expression $g(x)$ n'a de sens que si $1+x>0$, donc si $x \in\,]-1;+\infty[$.
Par suite, $\mathcal{D}_g = \,]-1;+\infty[$.

Q2. Déterminer la limite de g en -1. Interprêter graphiquement le résultat.

Q 2| Éléments de réponse

Il est immédiat que $1+x \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0$, donc par composition $\ln(1+x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} -\infty$ et ainsi $g(x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} -\infty$.
On en déduit que la courbe représentative de g admet en -1 une asymptote verticale d'équation $x=-1$.

Q3. En remarquant que : $\forall x \in\,]-1;+\infty[\, \setminus \{0\}\,,\ \ln(1+x) = \ln\left(x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$
déterminer la limite de g en $+\infty$.

Q 3| Éléments de réponse

On a donc : $\forall x \in\,]-1;+\infty[\,,\ g(x)$
$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - x \\ &= \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x \\ &= x\left(\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} - 1\right) \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Comme $\dfrac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $1+\dfrac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc par composition $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par quotient $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi $\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} - 1 \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -1$.
Finalement par produit, on en déduit que $g(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Q4. Justifier que le quotient $\dfrac{g(x)}{x}$ admet une limite finie notée ℓ en $+\infty$, et la déterminer.

Q 4| Éléments de réponse

Les calculs précédents donnent que : $\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ g(x) = x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x} - 1\right)$

et par suite que : $\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x} - 1$

et toujours en reprenant les résultats précédents, on a : $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$

Q5. Comment interpréter graphiquement la limite de la différence $g(x) - \ell x$ quand x tend vers $+\infty$?

Q 5| Éléments de réponse

On a tout d'abord que : $\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ g(x) - (-x) = \ln(1+x)$

D'après ce qui précède, $g(x) + x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc la courbe représentative de g admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = -x$ en $+\infty$.

Partie B | Étude des variations de g

Q6. Justifier que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$, puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_g$.

Q 6| Éléments de réponse

La fonction $x \longmapsto 1+x$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$. La fonction $t \longmapsto \ln(t)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, donc par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$. Par ailleurs la fonction $x \longmapsto -x$ est clairement dérivable sur $]-1;+\infty[$, donc par somme, la fonction g est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

On a alors : $\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ g'(x)$
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 \\ &= \frac{1-(1+x)}{1+x} \\ &= -\frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

Q7. Construire, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction g sur $\mathcal{D}_g$.

Q 7| Éléments de réponse

Le signe sur $]-1;+\infty[$ est clairement donné par celui de $-x$ sur ce même intervalle, étant donné que l'expression $1+x$ y est strictement positive.

On en déduit le tableau des variations de g sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $-x$	||	$+$	0	$-$	
Signe de $g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
Variations de g	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Q8. Explicitez le signe de g sur $\mathcal{D}_g$.

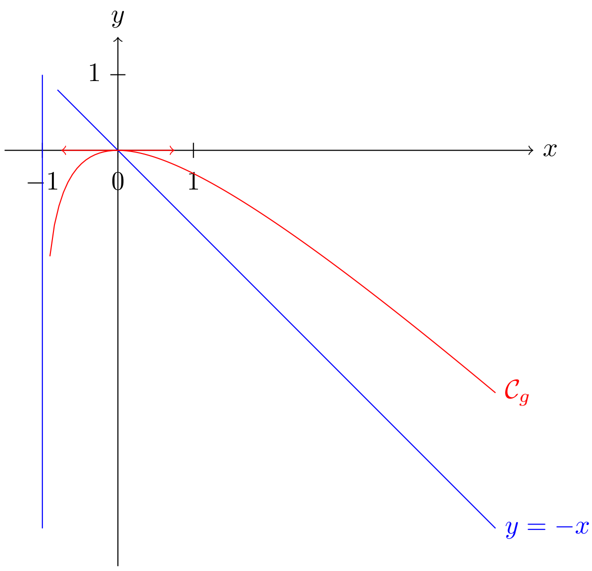
Q 8| Éléments de réponse

L'étude des variations de g montre que la fonction g présente en $x=0$ un maximum global qui vaut $g(0)=0$, ce qui assure que : $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[,\ g(x) \leq 0$
Par suite, la fonction g est négative sur $\left]-1;+\infty\right[$.

Q9. Construire dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative de la fonction g, ses éventuelles asymptotes, la droite d'équation $y=\ell x$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Q 9| Éléments de réponse

Comme $g'(0)=0$, on en déduit que $\mathcal{C}_g$ admet une tangente horizontale en $x=0$.



Partie C | Étude du comportement de f en 0

Q10. Déterminer le domaine $\mathcal{D}_f$ de définition de f.

Q 10| Éléments de réponse

L'expression $f(x)$ n'a de sens que si son dénominateur est définie et est non nul. Or ce dernier est exactement $g(x)$ dont on sait que cette dernière expression est définie sur $\left]-1;+\infty\right[$ et de ne s'annule qu'en $x=0$.
Par suite, le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \left]-1;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$.

Q11. Justifier que l'on a : $\ln(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$

puis montrer que : $\frac{1}{\ln(1+x)-x} = -\frac{2}{x^2}\left(1+\frac{2}{3}x - \frac{1}{18}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)$

Q 11| Éléments de réponse

On sait que : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$

et par suite que : $\ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$

Il vient donc que :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln(1+x)-x} &= \frac{1}{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}\\ &= -\frac{2}{x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}\end{aligned}$$

Or comme $\dfrac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\underset{t\to 0}{o}(t^2)$ on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln(1+x)-x} &= -\frac{2}{x^2}\left(1+\left(\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{2}\right)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\
&= -\frac{2}{x^2}\left(1+\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{2x}{3}\right)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\
&= -\frac{2}{x^2}\left(1+\frac{2}{3}x-\frac{x^2}{2}+\frac{4x^2}{9}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\
&= -\frac{2}{x^2}\left(1+\frac{2}{3}x-\frac{x^2}{18}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)
\end{aligned}$$

Q12. Former le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{x} - \sin(x) + x$

Q 12| Éléments de réponse

On sait que : $\mathrm{e}^{t} = 1+t+\dfrac{t^2}{2}+\underset{t\to 0}{o}(t^2)$

et que : $\sin(t) = t-\dfrac{t^3}{6}+\underset{t\to 0}{o}(t^4)$.

Par suite, il vient que :

$$\begin{aligned}
x^2\mathrm{e}^{x}-\sin(x)+x &= x^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)-x+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)+x\\
&= x^2+x^3+\frac{x^4}{2}-x+\frac{x^3}{6}+x+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\\
&= x^2+\frac{7}{6}x^3+\frac{x^4}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)
\end{aligned}$$

Q13. En déduire que : $f(x) = -2-\dfrac{11}{3}x-\dfrac{22}{9}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$

Q 13| Éléments de réponse

Par produit, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x^2+\frac{7}{6}x^3+\frac{x^4}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\times\left(-\frac{2}{x^2}\left(1+\frac{2}{3}x-\frac{x^2}{18}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\right)\\
&= -\frac{2}{x^2}\left(x^2+\frac{7}{6}x^3+\frac{x^4}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\times\left(1+\frac{2}{3}x-\frac{x^2}{18}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\
&= \left(-2-\frac{7}{3}x-x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\times\left(1+\frac{2}{3}x-\frac{x^2}{18}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\\
&= -2-\frac{4}{3}x+\frac{x^2}{9}-\frac{7}{3}x-\frac{14}{9}x^2-x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\\
&= -2-\frac{11}{3}x-\frac{22}{9}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

Q14. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 en précisant la valeur du prolongement en 0, puis que ce prolongement noté $\tilde{f}$ est dérivable en 0.

Q 14| Éléments de réponse

Le développement limité précédent permet de voir que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -2$ ce qui assure que f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = -2$. Par ailleurs, comme f, et son prolongement en fait, admet un $DL_2(0)$ par troncature, elle admet un $DL_1(0)$ ce qui assure que f est dérivable en 0 et que l'on a $f'(0) = -\dfrac{11}{3}$.

Q15. Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ en 0 de $\tilde{f}$, et préciser la position relative de $\mathcal{T}_0$ par rapport à la courbe représentative de la fonction $\tilde{f}$ au voisinage de 0.

Q 15| Éléments de réponse

Le développement limité précédent de f permet de dire qu'une équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 est $y = -2 - \frac{11}{3}x$, et que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente en 0 est donnée au voisinage de 0 par $-\frac{22}{9}x^2$ qui est clairement négatif.
Par suite, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de sa tangente en 0.

Problème n° 2 | Un paradoxe

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est à dire pour laquelle, à chaque lancer, les probabilités d'apparition de « pile » et de « face » sont égales à $\frac{1}{2}$. On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

Deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent avec les règles suivantes :

- le joueur J_1 est gagnant si la configuration « pile, pile, face » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « face, pile, pile » n'apparaisse ;
- le joueur J_2 est gagnant si la configuration « face, pile, pile » apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration « pile, pile, face » n'apparaisse.

étant entendu que lorsque l'on parle de configuration « pile, pile, face » ou « face, pile, pile », il s'agit du résultat de trois lancers consécutifs.

On se propose de démontrer que, dans ce jeu, le joueur J_2 possède un net avantage sur le ljouer J_1.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n lévénement « on obtient pile au n^{e}lancer » et B_n l'événement « on obtient face au n^{e}lancer ».

De plus, pour tout entier naturel $n \geq 3$, on note G_n l'événement « le joueur J_1 est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n » et g_n la probabilité de G_n.

Partie A | Préliminaire technique

Dans tout ce paragraphe, on désigne par E le sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles défini par :

$$E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \right\}$$

On désigne par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites dont le terme général est donné ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n \text{ et } \beta_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

Q16. Montrer que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Q 16| Éléments de réponse

E **est un sous-ensemble de l'espace vectoriel des suites réelles :** par construction de E.

Le vecteur nul de l'ensemble des suites réelles, c'est à dire la suite nulle, appartient à E : en effet, si l'on note $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite nulle, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = 0$.

Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N},\, \frac{1}{2}\underbrace{u_{n+1}}_{=0} + \frac{1}{4}\underbrace{u_{n+1}}_{=0} = 0$

Il vient donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$

et donc la suite nulle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient bien à E.

E **est stable par combinaison linéaire :** soient $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \in & E \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & \in & E \end{array}\right.$

On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire par : $\forall n \in \mathbb{N},\, w_n = \lambda u_n + v_n$.

Montrons que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N},\, w_{n+2} = \frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{1}{4}w_n$.

On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} & = & \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\
 & \underset{\substack{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E}}{=} & \lambda\left(\frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n\right) + \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{4}v_n \\
 & = & \frac{1}{2}\left(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\lambda u_n + v_n\right) \\
 & = & \frac{1}{2}w_{n+1} + \frac{1}{4}w_n
\end{array}$$

et par suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, ce qui assure que E est stable par combinaison linéaire.

Q17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de E. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle si, et seulement si, $u_0 = u_1 = 0$.

Q 17| Éléments de réponse

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ **avec** $u_0 = u_1 = 0$ **:** il est immédiat que $u_2 = 0$, puis $u_3 = 0$ et une récurrence double permettra d'établir que $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ **est la suite nulle :** il est immédiat que $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$.

Q18. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois éléments de E. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n = 0$$

Q 18| Éléments de réponse

On désigne par $\mathcal{F} = ((u_0, u_1), (v_0, v_1), (w_0, w_1))$. $\mathcal{F}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Par théorème, elle est donc liée, et il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\alpha(u_0, u_1) + \beta(v_0, v_1) + \gamma(w_0, w_1) = (0,0)$$

ce qui donne : $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha u_0 + \beta v_0 + \gamma w_0 & = & 0 \\ \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 & = & 0 \end{array}\right.$

Par conséquent, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $t_n = \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n$ est la suite nulle d'après la question précédente puisque ses deux premiers termes t_0 et t_1 sont nuls.

Q19. Démontrer que les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.

Q 19| Éléments de réponse

On commence par remarquer que : $\begin{array}{rcl} \left(1-\sqrt{5}\right)^2 & = & 1 - 2\sqrt{5} + 5 \\ & = & 6 - 2\sqrt{5} \\ \left(1+\sqrt{5}\right) & = & 1 + 2\sqrt{5} + 5 \\ & = & 6 + 2\sqrt{5} \end{array}$

$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ **:** en effet :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2}\alpha_{n+1} + \frac{1}{4}\alpha_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \times \frac{3-\sqrt{5}}{4} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \times \frac{6-2\sqrt{5}}{16} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \times \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4^2} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+2} \\
&= \beta_{n+2}
\end{aligned}$$

$(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ **:** en effet :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2}\beta_{n+1} + \frac{1}{4}\beta_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \times \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \times \frac{6+2\sqrt{5}}{16} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \times \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4^2} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n+2} \\
&= \beta_{n+2}
\end{aligned}$$

Q20. Établir que la famille formée par les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une famille libre de E.

Q 20| Éléments de réponse

On a $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 1$, ce qui donne $\alpha_0 = \beta_0$, donc si la famille formée par les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était liée, on devrait avoir aussi $\alpha_1 = \beta_1$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi la famille formée par les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une famille libre de E.

Q21. Justifier alors que E est de dimension 2.

Q 21| Éléments de réponse

On a vu que toute famille de trois vecteurs de E est une famille liée, donc la dimension de E est au plus égale à 2.
Par ailleurs, on a trouvé précdemment que la famille formées par les deux vecteurs de E que sont $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre, donc la dimension de E est au moins égale à 2.

Par conséquent, la dimension de E est exactement 2.

Partie B | Étude du jeu

Q22. Justifier, pour tout entier $n \geq 3$, l'égalité $G_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_n$. En déduire g_n.

Q 22| Éléments de réponse

On commence par remarquer qu'aucun des deux joueurs ne peut gagner avant le 3elancer.

Étude de l'événement G_3 : parmi les événements $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_2 \cap B_3$, $A_1 \cap B_2 \cap A_3$, $B_1 \cap A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap B_2 \cap B_3$, $B_1 \cap A_2 \cap B_3$, $B_1 \cap B_2 \cap A_3$ et $B_1 \cap B_2 \cap B_3$, le seul qui conduise à la victoire de J_1 est l'évément $A_1 \cap A_2 \cap B_3$.

Étude de l'événement G_4 : sur le même principe, la réalisation de G_4 demande que l'événement $A_2 \cap A_3 \cap B_4$ soit réalisé.
Parmi les deux événements $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4$ et $B_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4$, seul l'événement $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4$ conduit à la victoire de J_1 à l'issue du 4^{e} lancer, puisque l'autre conduirait à la victoire de J_2 dès le 3elancer.

Étude de l'événement G_n pour $n \geq 5$: la réalisation de G_n demande que l'événement $A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap B_n$ soit réalisé.
Si parmi les $n-3$ premiers lancers, il apparaît face, alors la séquence « face-pile-pile » se produit avant la séquence « pile-pile-face » et donc ce serait le joueur J_2 qui serait gagnant. Par suite, les $n-3$ premiers lancers ne peuvent conduire qu'à pile.
Finalement, on a bien $G_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap B_n$.

Le protocole de jeu permet de pouvoir considérer que les résultats des différents lancers sont indépendants les uns des autres, ce qui assure l'indépendance des événements $A_1, \ldots, A_{n-1}$ et B_n, et que l'on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_n) &= g_n \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap B_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{n_2}) \times \mathbb{P}(A_{n-1}) \times \mathbb{P}(B_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Q23. En déduire la probabilité que le joueur J_1 soit déclaré gagnant.

Q 23| Éléments de réponse

En notant J l'événement « le joueur J_1 gagne », on a que $J = \bigcup_{n=2}^{+\infty} G_n$.

Cette réunion étant clairement disjointe, il vient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} G_n\right) \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} \mathbb{P}(G_n) \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Q24. Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par d_n la probabilité que lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs.

Préciser d_1 et d_2.

Q 24| Éléments de réponse

Valeur de d_1 : il est immédiat que $d_1 = 1$ car il n'y a qu'un seul lancer...et donc impossible d'avoir deux piles consécutifs.

Valeur de d_2 : l'indépendance des lancers conduits à dire que la probabilité d'obtenir deux piles consécutifs est de $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ ce qui donne que $d_2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Q25. En considérant les résultats des lancers de rang $n+1$ et $n+2$, justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité suivante :

$$d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n$$

Q 25| Éléments de réponse

On note D_n l'événement « on n'obtient jamais deux piles consécutifs lors des n premiers lancers ».
On a donc $d_n = \mathbb{P}(D_n)$.
On a alors : $D_{n+2} = (D_n \cap B_{n+1} \cap A_n) \cup (D_{n+1} \cap B_{n+2})$
Cette réunion étant disjointe, et par indépendance des lancers, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_{n+2}) &= \mathbb{P}(D_n \cap B_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(D_{n+1} \cap B_{n+2}) \\
&= \mathbb{P}(D_n) \times \mathbb{P}(B_{n+1}) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(D_{n+1}) \times \mathbb{P}(B_{n+2}) \\
&= \mathbb{P}(D_n) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \mathbb{P}(D_{n+1}) \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{P}(D_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(D_{n+1})
\end{aligned}$$

ce qui conduit bien à $d_{n+2} = \dfrac{1}{2} d_{n+1} + \dfrac{1}{4} d_n$.

Q26. Justifier l'existence de deux constantes réelles α et β que l'on ne cherchera pas à calculer telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

Q 26| Éléments de réponse

La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient donc à E. Comme la famille formée des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de deux vecteurs de E qui est de dimension 2, par théorème, elle en forme une base.
Par suite, il existe (un unique) $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \alpha \times \alpha_n + \beta \times \beta_n$
ce qui est exactement ce que l'on cherche à établir.

Q27. En déduire que la série $\sum d_n$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5$.

Q 27| Éléments de réponse

Puisque $\left|\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}\right| < 1$, les deux séries géométrique de terme général $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ sont convergentes. Ainsi, d_n est le terme général d'une série obtenue par combinaison linéaire du terme général de deux séries convergentes, et par théorème, la série $\sum d_n$ est convergente et dans ce cas on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$

Or on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n+1} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n$

ce qui amène après changement d'indices à : $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} d_n = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} d_n + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$

Par suite on en déduit que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n - d_1 - d_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} d_n - d_1\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$

c'est à dire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \underbrace{-d_1 - d_2}_{=-\frac{7}{4}} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n - \frac{1}{2}\underbrace{d_1}_{=1}$

Ainsi : $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = \underbrace{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}}_{\frac{5}{4}}$

ce qui donne finalement que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 5.$

Q28. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement « aucun des deux joueurs n'a été déclaré vainqueur pendant les n premiers lancers ».

Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $\mathbb{P}(C_n) = \dfrac{1}{2^n} + d_n.$

Q 28| Éléments de réponse

La famille d'événements $\left\{D_n, \overline{D_n}\right\}$ formant un système complet d'événements, d'apès la formule des probabilités totales, on a donc : $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(C_n \cap D_n) + \mathbb{P}\left(C_n \cap \overline{D_n}\right)$.
On a nécessairement $D_n \subset C_n$ car cela signifie qu'aucune séquence « pile-pile-face » ou « face-pile-pile » n'est réalisée et cela ne peut se produire que si la séquence « pile-pile » ne se produit jamais. Ainsi, $C_n \cap D_n = D_n$.
Par ailleurs, $C_n \cap \overline{D_n} = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ car on doit avoir une séquence « pile-pile » sans que cette dernière ne soit précédée ou suivie d'un face.
Ainsi, il vient : $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(D_n) + \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$
et finalement par indépendance des résultats des lancers, comme précédemment on trouve que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Finalement, on a bien $\mathbb{P}(C_n) = d_n + \dfrac{1}{2^n}$.

Q29. Montrer que la probabilité que l'un des joueurs soit déclaré gagnant est égale à 1.

Q 29| Éléments de réponse

On note G l'événement « un des joueurs gagne ». On a donc $\overline{G} = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$.
La suite d'événements $(C_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante au sens de l'inclusion puisque si aucun joueur n'a gagné à l'issue des $n+1$ premiers lancers, c'est qu'aucun d'entre eux n'a gagné à l'issue des n premiers lancers. Par théorème, on a donc : $\mathbb{P}(C_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\overline{G}\right)$.
Or $\sum d_n$ étant une série convergente, son terme général converge nécéssairement vers 0, et comme $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, il vient que $d_n + \dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $\mathbb{P}\left(\overline{G}\right) = 0$ ce qui amène à $\mathbb{P}(G) = 1$.

Q30. Calculer la probabilité que le joueur J_2 soit gagnant et conclure.

Q 30| Éléments de réponse

En notant p_i la probabilité que le joueur J_i soit gagnant, on a clairement que $p_1 + p_2 = 1$.
Puisque $p_1 = \dfrac{1}{4}$, on en déduit que $p_2 = \dfrac{3}{4}$ ce qui signifie que le joueur J_2 a trois fois plus de chances que le joueur J_1 de

gagner...

Q31. Montrer que l'on peut définir une variable aléatoire T qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant.

Q 31| Éléments de réponse

L'étude précédente permet de montrer qu'il est presque sûr qu'un joueur finira par gagner la partie. On peut ainsi définir la variable aléatoire T comme étant le rang du lancer qui conduit à la victoire de l'un des joueurs. Son support est alors $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.

Q32. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a l'égalité suivante : $\mathbb{P}([T_n = n]) = \dfrac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.

Q 32| Éléments de réponse

Pour $n \geq 3$, on a clairement que $[T = n] = C_{n-1} \setminus C_n$ avec $C_n \subset C_{n-1}$.
Il vient donc que : $\mathbb{P}([T = n]) = \mathbb{P}(C_{n-1}) - \mathbb{P}(C_n)$
ce qui amène à : $\mathbb{P}([T = n]) = \dfrac{1}{2^{n-1}} + d_{n-1} - \dfrac{1}{2^n} - d_n$.
Comme $\dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{2^n} = \underbrace{\dfrac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)}_{=\frac{1}{2}}$ il vient que $\mathbb{P}([T = n]) = \dfrac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$.

Q33. Montrer que la variable T possède une espérance et que : $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=2}^{+\infty} d_n + 2d_2$

Q 33| Éléments de réponse

Par définition T admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum n \times \mathbb{P}([T = n])$ est absolument convergente, ce qui compte-tenu de la positivité du terme général de cette série, revient à établir la convergence.
On a clairement que : $\forall n \geq 1,\ n \times \mathbb{P}([T = n]) = \dfrac{1}{2} \times \left(n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + n\,(d_n - d_{n-1})$.
La série $\sum n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ est une série géométrique dérivée telle que $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, ce qui assure sa convergence, et on a que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \underbrace{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}}_{=4}$$
Par ailleurs, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ n\,(d_n - d_{n-1}) = d_{n-1} + (n-1)d_{n-1} - nd_n$.
La série $\sum d_{n-1}$ est clairement convergente, et on a : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} ((n-1)d_{n-1} - nd_n) = -Nd_N$.
Or on sait que : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ Nd_N = \alpha \underbrace{N \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^N}_{\underset{\text{par c.c.}}{\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0}} + \beta \underbrace{N \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^N}_{\underset{\text{par c.c.}}{\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0}}$
Par suite, la série $\sum ((n-1)d_{n-1} - nd_n)$ est convergente.
Finalement, $n \times \mathbb{P}([T = n])$ étant une combinaison linéaire des termes généraux de séries convergentes, la série $\sum n\mathbb{P}([T = n])$ est convergente, ce qui assure l'existence d'une espérance pour T.

Q34. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

Q 34| Éléments de réponse

En reprenant la décomposition précédente de $n \times \mathbb{P}([T=n])$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{+\infty} n\mathbb{P}([T=n]) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 0 - 1 - 2\times\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=3}^{+\infty} d_{n-1} + \sum_{n=3}^{+\infty}((n-1)d_{n-1} - nd_n) \\
&= \frac{1}{2}(4-2) + \sum_{n=2}^{+\infty} d_n + 2d_2 \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n - d_1 + 2d2 \\
&= 1 + 5 - 1 + 2\times\frac{3}{4} \\
&= 5 + \frac{3}{2} \\
&= \frac{13}{2}
\end{aligned}$$

Problème n° 3 | Le Monty Hall

Soient n et p deux entiers non nuls tels que $p \leq \dfrac{n}{3}$.

Pour le tirage d'une tombola, on dispose dans une urne n tickets numérotés de 1 à n dont seulement p sont « gagnants » et connus à l'avance par l'organisateur du jeu, les $n-p$ autres tickets étant bien évidemment « perdants ».

Un joueur achète successivement p tickets, choisis au hasard.

Le meneur de jeu dévoile ensuite p numéros perdants parmi les $n-p$ numéros restants qu'il retire de l'urne et propose au joueur deux stratégies :

1e **stratégie :** le joueur garde ses p numéros ;

2e **stratégie :** le joueur échange ses tickets contre p nouveaux numéros, choisis au hasard parmi les $n-2p$ restants dans l'urne.

Le but de ce problème est de déterminer dans deux cas particuliers, laquelle des deux stratégies permet d'obtenir le plus de numéros gagnants.

Pour $1 \leq i \leq p$, on note X_i (resp. Y_i) la variable aléatoire qui vaut 1 si le i^{e} numéro pioché (lors de la 1e phase de pioche) est gagnant et 0 sinon (resp. lors de la seconde phase de pioche, dans le cadre de la deuxième stratégie).

On note A (resp. B) le nombre de numéros gagnants choisis avec la première stratégie (resp. avec la deuxième).

Par ailleurs, on rappelle que si l'on considère deux événements E et F avec $\mathbb{P}(F) \neq 0$, on notera $\mathbb{P}(E \mid F)$ la probabilité conditionnelle de l'événement E sachant l'événement F.

Partie A | Cas $n=3$ et $p=1$

On suppose dans cette partie uniquement que $n=3$ et $p=1$.

Q35. Déterminer la loi de A.

Q 35| Éléments de réponse

Le seul ticket prélevé est soit gagnant soit perdant, et la probabilité que le billet soit gagnant est égal à $\dfrac{1}{3}$. Ainsi $A(\Omega) = \{0,1\}$ et donc A suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

Q36. Que vaut ici $\mathbb{P}([Y_1=1] \mid [X_1=0])$? En déduire la loi de B.

Q 36| Éléments de réponse

La réalisation de l'événement $[X_1=0]$ signifie que l'on a pioché au premier coup un ticket perdant. Le principe du jeu fait que l'animateur retire un des deux mauvais tickets, et on est alors certain de prélever au deuxième tirage un ticket gagnant.
Ainsi $\mathbb{P}([Y_1=1] \mid [X_1=0]) = 1$.
Sur le même principe $\mathbb{P}([Y_1=1] \mid [X_1=1]) = 0$.
Comme pour A, on a que $B(\Omega) = \{0,1\}$. Les événements $[X_1=0]$ et $[X_1=1]$ formant un système complet d'événements,

d'après la formule des probabilités totales, il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([B=1]) &= \mathbb{P}([Y_1=1]) \\ &= \mathbb{P}([X_1=0]) \times \underbrace{\mathbb{P}([Y_1=1] \mid [X_1=0])}_{=1} + \mathbb{P}([X_1=1]) \times \underbrace{\mathbb{P}([Y_1=1] \mid [X_1=1])}_{=0} \\ &= \mathbb{P}([X_1=0]) \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

et donc B suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.

Q37. Expliciter $\mathbb{E}(A)$ et $\mathbb{E}(B)$.

Q 37| Éléments de réponse

A et B suivant toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre respectif $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, on a $\mathbb{E}(A) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{E}(B) = \frac{2}{3}$.

Q38. Quelles stratégie semble alors la plus avantageuse ?

Q 38| Éléments de réponse

Il est clair que $\mathbb{E}(A) < \mathbb{E}(B)$, ce qui induit que la 2e stratégie est meilleure que la 1e stratégie.

Partie B | Cas $n \geq 6$ et $p = 2$

On suppose dans cette partie uniquement que $n \geq 6$ et $p = 2$.

Q39. Déterminer la loi de X_1.

Q 39| Éléments de réponse

Le premier ticket étant soit gagnant ce qui correspond à l'événement $[X_1 = 1]$ qui est réalisé avec la probabilité $\frac{2}{n}$ puisqu'il y a deux tickets gagnants, soit perdant ce qui correspond à l'événement $[X_1 = 0]$, X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{n}$.

Q40. Expliciter la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X_1, X_2).

Q 40| Éléments de réponse

En utilisant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{P}([X_1=0]) \cap [X_2=0]) &= \mathbb{P}([X_1=0]) \times \mathbb{P}([X_2=0] \mid [X_1=0]) \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-2-1}{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{P}([X_1=0]) \cap [X_2=1]) &= \mathbb{P}([X_1=0]) \times \mathbb{P}([X_2=1] \mid [X_1=0]) \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{2}{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{P}([X_1=1]) \cap [X_2=0]) &= \mathbb{P}([X_1=1]) \times \mathbb{P}([X_2=0] \mid [X_1=1]) \\ &= \frac{2}{n} \times \frac{n-1-1}{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{P}([X_1=1]) \cap [X_2=1]) &= \mathbb{P}([X_1=1]) \times \mathbb{P}([X_2=1] \mid [X_1=1]) \\ &= \frac{2}{n} \times \frac{1}{n-1}\end{aligned}$$

ce qui donne :

X_1 \ X_2	0	1
0	$\dfrac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}$	$\dfrac{2(n-2)}{n(n-1)}$
1	$\dfrac{2(n-2)}{n(n-1)}$	$\dfrac{2}{n(n-1)}$

Q41. En déduire la loi marginale de X_2.

Q 41| Éléments de réponse

À l'aide du système complet d'événements $[X_1 = 0]$ et $[X_1 = 1]$, il vient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_2 = 0]) &= \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) \\
&= \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} + \frac{2(n-2)}{n(n-1)} \\
&= \frac{(n-2)\left((n-3)+2\right)}{n(n-1)} \\
&= \frac{(n-2)(n-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{n-2}{n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_2 = 1]) &= \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \\
&= \frac{2(n-2)}{n(n-1)} + \frac{2}{n(n-1)} \\
&= \frac{2n-4+2}{n(n-1)} \\
&= \frac{2(n-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Q42. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Q 42| Éléments de réponse

On remarque notamment que : $\mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \mathbb{P}([X_2 = 1]) = \dfrac{4}{n^2}$ et $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_1 = 1]) = \dfrac{2}{n(n-1)}$ ce qui amène clairement que $\mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \mathbb{P}([X_2 = 1]) \neq \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_1 = 1])$ et donc que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Q43. En déduire la loi de A, puis son espérance.

Q 43| Éléments de réponse

Il est clair que $A = X_1 + X_2$ puisque compte le nombre de tickets gagnants après deux tirages.
On a donc $A(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([A=0]) & = & \mathbb{P}([X_1=0]\cap[X_2=0]) \\ & = & \dfrac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([A=1]) & = & \mathbb{P}([X_1=1]\cap[X_2=2])+\mathbb{P}([X_1=0]\cap[X_2=1]) \\ & = & \dfrac{2(n-2)}{n(n-1)}+\dfrac{2(n-2)}{n(n-1)} \\ & = & \dfrac{4(n-2)}{n(n-1)}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([A=2]) & = & \mathbb{P}([X_1=1]\cap[X_2=1]) \\ & = & \dfrac{2}{n(n-1)}\end{array}$$

Par suite, A étant à support fini, elle admet une espérance, qui par définition vaut :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(A) & = & 0\times\mathbb{P}([A=0])+1\times\mathbb{P}([A=1])+2\times\mathbb{P}([A=2]) \\ & = & \dfrac{4(n-2)}{n(n-1)}+\dfrac{4}{n(n-1)} \\ & = & \dfrac{4n-8+4}{n(n-1)} \\ & = & \dfrac{4(n-1)}{n(n-1)} \\ & = & \dfrac{4}{n}\end{array}$$

Q44. On admet que Y_1 et Y_2 suivent toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{2-\mathbb{E}(A)}{n-4}$.
Démontrer que $\mathbb{E}(B)=\dfrac{4(n-2)}{n(n-4)}$.

Q 44| Éléments de réponse

Sur le même principe, on a $B=Y_1+Y_2$.
Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(B)=\mathbb{E}(Y_1)+\mathbb{E}(Y_2)$.
Comme Y_1 et Y_2 suivent des lois de Bernoulli, leur espérance est égale à la valeur de leur paramètre.
Par suite, il vient que $\mathbb{E}(B)=\dfrac{2(2-\mathbb{E}(A))}{n-4}$.

Ainsi :
$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}(B) & = & \dfrac{2-\frac{4}{n}}{n-4}+\dfrac{2-\frac{4}{n}}{n-4} \\ & = & \dfrac{2}{n-4}\times\left(2-\dfrac{4}{n}\right) \\ & = & \dfrac{2}{n-4}\times\dfrac{2n-4}{n} \\ & = & \dfrac{4n-8}{n(n-4)} \\ & = & \dfrac{4(n-2)}{n(n-4)}\end{array}$$

Q45. Conclure.

Q 45| Éléments de réponse

On a clairement que $\dfrac{n-2}{n-4}>1$, donc que $\dfrac{4}{n}<\dfrac{4}{n}\times\dfrac{n-2}{n-4}$ ce qui assure que $\mathbb{E}(A)<\mathbb{E}(B)$ et donc que dans ce cas encore, la 2e stratégie est plus avantageuse que la 1e stratégie