À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Étude d'une famille de fonctions pour un calcul de somme de série

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n et h_n respectivement, les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \ln(1+x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h_n : \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n\ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1} \end{array} \right.$$

Partie A | Étude du signe de la fonction h_n

Q1. Déterminer les limites de h_n aux bornes de son ensemble de définition.

Éléments de correction

Limite en $+\infty$ de h_n : La limite en $+\infty$ du quotient de polynômes $\dfrac{x}{x+1}$ est exactement celle du quotient de ses monômes de plus haut degré $\dfrac{x}{x} = 1$ à savoir 1.

Par ailleurs, $x+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme $\ln(X) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par composition, $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc que $n\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par somme, on en déduit donc que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Limite en -1^+ : il est clair que $1+x \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} 0$ et donc par composition que $\ln(1+x) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Par ailleurs, la fonction $x \longmapsto x+1$ est une fonction affine croissante qui s'annule en -1, donc est positive sur $[-1;+\infty[$.

Comme $x+1 \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} 0$ par valeurs positives, par quotient $\dfrac{x}{x+1} \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Il vient alors par somme que $n\ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1} \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} -\infty$.

Q2. Dresser le tableau de variation de la fonction h_n sur son ensemble de définition en y précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Éléments de correction

Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x+1$ sont clairement dérivables sur $]-1;+\infty[$, et comme $x \longmapsto x+1$ ne s'y annule pas, par quotient la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
La fonction $x \longmapsto x+1$ étant par ailleurs strictement positive sur $]-1;+\infty[$ et la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ étant dérivable sur $]0;+\infty[$, par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et par suite il en est de même pour $x \longmapsto n\ln(1+x)$.
Finalement par somme, la fonction h_n est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Il vient alors que :

$$\begin{aligned}\forall x \in\,]-1;+\infty[\,,\ h_n'(x) &= \frac{n}{1+x}+\frac{1\times(x+1)-x\times 1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{n}{1+x}+\frac{1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{n(x+1)+1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{nx+n+1}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Puisque $n\in\mathbb{N}^*$, le signe de $h_n'(x)$ sur $]-1;+\infty[$ est exactement celui de son numérateur $nx+n+1$. La fonction $x\longmapsto nx+n+1$ étant une fonction affine croissante qui s'annule en $-\dfrac{n+1}{n}=-1-\dfrac{1}{n}<-1$ on en déduit le signe de cette dernière sur $]-1;+\infty[$:

x	-1 $+\infty$
Signe de $nx+n+1$	$+$

et par suite, on déduit le signe de $h_n'(x)$ et les variations de h_n sur $]-1;+\infty[$:

x	-1 $+\infty$
Signe de $h_n'(x)$	$+$
Variations de h_n	$-\infty \nearrow +\infty$

Q3. Montrer que l'équation $h_n(x)=0$ d'inconnue x, admet sur $]-1;+\infty[$ un unique solution x_0 que l'on déterminera.

Éléments de correction

D'après ce qui précède :
- h_n est continue sur $]-1;+\infty[$ par opérations usuelles sur les fonctions continues ;
- h_n est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$;
- les limites de h_n aux bornes de son ensemble de définition, même infinies, sont de signe opposées ;

ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotone, l'équation $h_n(x)=0$ admet une unique solution notée x_0 sur $]-1;+\infty[$.
Il est alors immédiat que $h_n(0)=0$, et donc que $x_0=0$.

Q4. En déduire le signe de la fonction h_n sur $]-1;+\infty[$.

Éléments de correction

Compte-tenu des variations de h_n sur $]-1;+\infty[$ et de la valeur de h_n en 0, on en déduit le signe de la fonction h_n sur $]-1;+\infty[$:

x	-1	0	$+\infty$
Signe de $h_n'(x)$	‖	$+$	
Variations de h_n	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$
Signe de $h_n(x)$	‖ $-$	0	$+$

Partie B | Étude du cas où $n = 1$

Dans cette partie, on étudie le cas particulier où $n = 1$.

Q5. Préciser les limites de f_1 aux bornes de son ensemble de définition.

Éléments de correction

Par définition, on a : $f_1 : \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array} \right.$.

Limite en -1^* : on a clairement que $1+x \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} 0$ et donc par composition que $\ln(1+x) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} -\infty$. Donc par produit, il vient que $x\ln(1+x) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Limite en $+\infty$: on a clairement que $1+x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc par composition que $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc par produit, il vient que $x\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Q6. Dresser le tableau de variation de la fonction f_1 sur son ensemble de définition.

Éléments de correction

Par définition, on a : $f_1 : \left| \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array} \right.$.

La fonction $x \longmapsto 1+x$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs strictement positives sur cet intervalle. La fonction $t \longmapsto \ln(t)$ étant dérivable sur $]0;+\infty[$, par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Par suite, par opérations usuelles sur les fonctions dérivables, la fonction f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Un calcul direct donne que : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ f_1'(x) = 1 \times \ln(1+x) + x \times \dfrac{1}{x+1} = h_1(x)$

De la question **Q4**, on en déduit alors le signe de $f_1'(x)$ puis les variations de f_1 sur $]-1;+\infty[$:

x	-1	0	$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$	‖ $-$	0	$+$
Variations de f_1	‖ $+\infty$ $\searrow$	$f_1(0) = 0$	$\nearrow$ $+\infty$

Partie C | Étude du cas général pour $n \geq 2$

Dans cette partie, on étudie le cas général où $n \geq 2$.

Q7. On note f_n' la dérivée de la fonction f_n.
Exprimer pour tout $x > -1$, $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

Éléments de correction

La fonction $x \longmapsto 1+x$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et à valeurs strictement positives sur cet intervalle. La fonction $t \longmapsto \ln(t)$ étant dérivable sur $]0;+\infty[$, par composition, la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
La fonction $x \longmapsto x^n$ étant dérivable sur $]-1;+\infty[$, par suite, par opérations usuelles sur les fonctions dérivables, la fonction f_1 est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{aligned}\forall x \in]1;+\infty[\,,\ f_n'(x) &= nx^{n-1}\ln(1+x) + x^n \times \frac{1}{x+1}\\ &= x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{x+1}\right)\\ &= x^{n-1}h_n(x)\end{aligned}$$

Q8. En distinguant les cas n impair et n pair, en déduire les variations de la fonction f_n sur $]-1;+\infty[$

Éléments de correction

On sait que : $\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x)$

Si n est impair : alors $n-1$ est pair, et par suite : $\forall x \in]-1;+\infty[\,,\ x^{n-1} \geq 0$
ce qui assure que $f_n'(x)$ est du même signe que $h_n(x)$ sur $]-1;+\infty[$.
Sur le même principe que pour le calcul des limites de f_1 en -1 et $+\infty$, on peut montrer que $f_n(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On en déduit alors les variations de f_n sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f_n	$+\infty$	$\searrow$	$f_n(0)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

Si n est pair : alors $n-1$ est impair, et par suite l'expression x^{n-1} change de signe en 0.
Sur le même principe que pour le calcul des limites de f_1 en -1 et $+\infty$, on peut montrer que $f_n(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On en déduit alors les variations de f_n sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
Signe de x^{n-1}		$-$	0	$+$	
Signe de $h_n(x)$	||	$-$	0	$+$	
Signe de $f_n'(x)$	||	$+$	0	$+$	
Variations de f_n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Partie D | Étude d'une suite définie par une intégrale et somme d'une série

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Par ailleurs, pour tout $x \in [0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

Q9. Montrer qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que l'on déterminera, tel que :

$$\forall x \in [0;1]\,,\ \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

Éléments de correction

Il est clair que : $\quad \forall x \in [0;1]\,,\ ax+b+\dfrac{c}{1+x} \ = \ \dfrac{ax(1+x)+b(1+x)+c}{1+x} \ = \ \dfrac{ax^2+(a+b)x+b+c}{1+x}$

Ainsi, par identification des deux numérateurs, (a,b,c) est solution du système $\begin{cases} a & = 1 \\ a+b & = 0 \\ & b+c = 0 \end{cases}$ ce qui amène directement à $\begin{cases} a & = 1 \\ b & = -1 \\ c & = 1 \end{cases}$, et par suite : $\quad \forall x \in [0;1]\,,\ \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

Q10. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

Éléments de correction

Par linéarité de l'intégrale, il vient que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\substack{1+x>0 \\ \text{sur } [0;1]}}{=} \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + [\ln(1+x)]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - 1 + 0 + \ln(2) - \ln(1) \\
&= \ln(2) - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Q11. À l'aide d'une intégration par parties, en déduire la valeur de u_1.

Éléments de correction

Par définition, on a : $\quad u_1 = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$

On effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl}
u(x) = \ln(1+x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \dfrac{1}{1+x} \\
v(x) = \dfrac{x^2}{2} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = x
\end{array}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, il vient :

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & \left[\dfrac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x}\times\dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ & = & \dfrac{1}{2}\ln(2) - 0 - \dfrac{1}{2}\left(\ln(2)-\dfrac{1}{2}\right) \\ & = & \dfrac{1}{4} \end{array}$$

Q12. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

Éléments de correction

Les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ sont données par le signe de $u_{n+1}-u_n$.
Soit alors $n\in\mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1}-u_n & = & \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \left(x^{n+1}\ln(1+x)-x^n\ln(1+x)\right)\,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^1 x^n\,(x-1)\ln(1+x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Il est clair que : $\forall x\in[0;1]\,,\ \left\{\begin{array}{rcl} x^n & \geq & 0 \\ 1-x & \leq & 0 \\ \ln(1+x) & \geq & 0 \end{array}\right.$
donc que : $\forall x\in[0;1]\,,\ x^n\,(x-1)\ln(1+x)\leq 0$.
La fonction $x\longmapsto x^n\,(x-1)\ln(1+x)$ étant continue sur $[0;1]$ et négative sur cet intervalle, par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n\,(1-x)\ln(1+x)\leq 0$, et par conséquent que $u_{n+1}-u_n\leq 0$, ce qui signifie que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction $x\longmapsto x^n\ln(1+x)$ étant continue et positive sur $[0;1]$, par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\geq 0$, ce qui assure que $u_n\geq 0$, et par suite que $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par 0.
Finalement, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante minorée, par théorème elle est convergente.

Q13. Établir l'encadrement : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq u_n\leq\dfrac{\ln(2)}{n+1}$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Éléments de correction

Encadrement : soit $n\in\mathbb{N}^*$.
La fonction $x\longmapsto\ln(1+x)$ est clairement croissante sur $[0;1]$ par composée de fonctions croissantes, donc il vient que : $\forall x\in[0;1]\,,\ \ln(1+0)\leq\ln(1+x)\leq\ln(1+1)$
Par ailleurs : $\forall x\in[0;1]\,,\ 0\leq x^n$
il vient que : $\forall x\in[0;1]\,,\ 0\leq x^n\ln(1+x)\leq x^n\ln(2)$
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $0\leq\underbrace{\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x}_{=u_n}\leq\displaystyle\int_0^1\ln(2)x^n\,\mathrm{d}x$

Or il est clair que :
$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1\ln(2)x^n\,\mathrm{d}x & = & \ln(2)\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\ & = & \ln(2)\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ & = & \ln(2)\left(\dfrac{1}{n+1}-0\right) \\ & = & \dfrac{\ln(2)}{n+1} \end{array}$$

Limite de $(u_n)_{n\geq 1}$: puisque $\dfrac{1}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il vient que $\dfrac{\ln(2)}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc par le théorème d'encadrement,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Q14. Établir la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

Éléments de correction

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$.

On remarque tout d'abord que : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n} (-x)^k$

Comme $x \in [0;1]$, on a bien $-x \neq 1$, et il vient alors que :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} \\ &= \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{1+x} \\ &\underset{(-1)^n=(-1)^{n+2}}{=} \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1} \end{aligned}$$

Q15. En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Éléments de correction

Par linéarité de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{n} (-x)^k\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 (-x)^k\,\mathrm{d}x\right)$

Comme on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-x)^k\,\mathrm{d}x &= (-1)^k \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\ &= (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} - 0\right) \\ &= \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

il vient alors que : $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{n} (-x)^k\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

ou encore que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

Or on a aussi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &\underset{\substack{1+x>0 \\ \text{sur } [0;1]}}{=} [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(2) - \ln(1) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

ce qui assure donc bien que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

Q16. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a clairement que : $\quad \forall x \in [0;1]\,,\, 0 \leq 1 \leq 1+x$
et donc par passage à l'inverse que : $\quad \forall x \in [0;1]\,,\, 0 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$
et comme $x^{n+1} \geq 0$ pour tout $x \in [0;1]$, on a donc : $\quad \forall x \in [0;1]\,,\, 0 \leq \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$
Par croissance de l'intégrale, il vient alors que : $\quad 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \underbrace{\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{n+2}}$

Comme $\dfrac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème d'encadrement il vient que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
ce qui assure finalement que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

Problème n° 2 | Matrices inversibles semblables à leur inverse

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de ce problème est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes entre elles.

Pour l'ensemble de ces parties, on désigne par $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle par ailleurs que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

Partie A | Premier exemple

On considère l'endomorphsime f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Q17. Montrer que A est inversible. Que peut-on en déduire pour f ?

Éléments de correction

La matrice A est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls, donc par théorème, la matrice A est inversible.
La matrice de f dans une base de $\mathbb{R}^3$ étant inversible, par théorème, f est bijective, et donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q18. On considère la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où l'on a : $\left\{\begin{array}{rcl} u_1 & = & 2e_1 + e_2 \\ u_2 & = & e_1 \\ u_3 & = & e_1 + e_3 \end{array}\right.$.

Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

On note $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}_3$.

On sait alors que : $\quad (\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3) \quad \Leftrightarrow \quad (B$ est inversible$)$
Un échelonnement en ligne donne que $\mathrm{rg}\,(B) = 3$ et donc par théorème, B est inversible, et donc la famille $\mathcal{C}$ est une

base de $\mathbb{R}^3$.

Q19. Déterminer les images par f des vecteurs de la famille $\mathcal{C}$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{C}$.

Éléments de correction

Par linéarité de f, on a donc : $$\begin{array}{rcl} f(u_1) & = & f(2e_1+e_2) \\ & = & 2f(e_1)+f(e_2) \\ & = & 2e_1 - e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ & = & e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ & = & \frac{1}{2}(2e_1+e_2) \\ & = & \frac{1}{2}u_1 \end{array}$$

Par construction de A on sait que $f(e_1) = e_1$ et par suite $f(u_2) = u_2$.

Sur le même principe, il vient que : $$\begin{array}{rcl} f(u_3) & = & f(e_1+e_3) \\ & = & f(e_1)+f(e_3) \\ & = & e_1+e_1+2e_3 \\ & = & 2e_1+2e_3 \\ & = & 2(e_1+e_3) \\ & = & 2u_3 \end{array}$$

Q20. Déterminer alors la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$.

Éléments de correction

Les calculs précédents donnent que : $\left\{\begin{array}{rcl} f(u_1) & = & \frac{1}{2}u_1 \\ f(u_2) & = & u_2 \\ f(u_3) & = & 2u_3 \end{array}\right.$

ce qui donne par construction de D que : $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Q21. Justifier que la matrice D est inversible, puis en donner son inverse.

Éléments de correction

La matrice D est une matrice triangulaire dont tous les termes diagonaux sont non nuls, donc par théorème, elle est inversible.

Par ailleurs, il est immédiat que $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Q22. On désigne par P la matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{C}$. Quel lien y-a-t-il entre A, D et P.

Éléments de correction

D'après les formules de changement de base pour les endomorphismes, on a : $D = P^{-1}AP$.

Q23. On désigne alors par Q la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned} Q^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

De même, un calcul direct donne que : $$\begin{aligned} QDQ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Q24. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Éléments de correction

Les calculs précdents donnent que $Q^2 = \mathrm{I}_3$, donc que Q est inversible d'inverse lui-même et on remarque donc que $QDQ = D^{-1}$.
Il vient alors que : $QP^{-1}APQ = D^{-1}$
ou encore que : $A = PQ^{-1}D^{-1}Q^{-1}P^{-1}$
ou encore que : $A = PQ^{-1}D^{-1}QP^{-1}$
et par opération sur l'inverse d'un produit que : $A = PQ^{-1}D^{-1}\left(PQ^{-1}\right)^{-1}$
ce qui assure que A et D^{-1} sont semblables.
Or puisque $D = P^{-1}AP$, il vient que $D^{-1} = PA^{-1}P$, ce qui assure que D^{-1} est semblable à A^{-1} et donc que A et A^{-1} sont semblables, ce qui est ce que l'on cherchait à établir.

Partie B | Deuxième exemple

On considère l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, -z, y + 2z) \end{array} \right.$$

On notera M la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
On désigne par u_1 et u_2 les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u_1 = e_1$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

Q25. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **:** par construction de f

Caractère linéaire de f : soient $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ v_1 = (x_1, y_1, z_1) & \in & \mathbb{R}^3 \\ v_1 = (x_2, y_2, z_2) & \in & \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$ et posons $v_3 = \lambda v_1 + v_2$ où $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$ avec

par construction $\left\{ \begin{array}{rcl} x_3 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ y_3 & = & \lambda y_1 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda z_1 + z_2 \end{array} \right.$

Montrons que $f(v_3) = \lambda f(v_1) + f(v_2)$.

Par définition de f, on a :

$$\begin{aligned} f(v_3) &= (x_3, -z_3, y_3+2z_3) \\ &= (\lambda x_1 + x_2, -(\lambda z_1 + z_2), \lambda y_1 + y_2 + 2(\lambda z_1 + z_2)) \\ &= (\lambda x_1 + x_2, -\lambda z_1 - z_2, \lambda y_1 + y_2 + 2\lambda z_1 + 2z_2) \\ &= (\lambda x_1 + x_2, -\lambda z_1 - z_2, \lambda y_1 + 2\lambda z_1 + y_2 + 2z_2) \\ &= (\lambda x_1 + x_2, -\lambda z_1 - z_2, \lambda(y_1 + 2z_1) + y_2 + 2z_2) \\ &= (\lambda x_1, -\lambda z_1, \lambda(y_1+2z_1)) + \underbrace{(x_2, -z_2, y_2+2z_2)}_{=f(v_2)} \\ &= \lambda\underbrace{(x_1, -z_1, y_1+2z_1)}_{=f(v_1)} + f(v_2) \\ &= \lambda f(v_1) + f(v_2) \end{aligned}$$

et par suite f est bien linéaire.

Conclusion : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est bien linéaire, donc par définition c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q26. Explicitez la matrice M.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\left\{\begin{aligned} f(e_1) &= (1,0,0) \\ &= e_1 \\ f(e_2) &= (0,0,1) \\ &= e_3 \\ f(e_3) &= (0,-1,2) \\ &= -e_2 + 2e_3 \end{aligned}\right.$$

et donc par construction de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Q27. f est-il un automorphisme ?

Éléments de correction

Comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, par théorème, on a : (f est bijective) $\Leftrightarrow$ (M est inversible)
Un échelonnement en lignes de la matrice M donne que M est de rang égal à 3, donc inversible, ce qui assure le caractère bijectif de f, et donc que f est bien un automorphisme.

Q28. Démontrer que l'endomorphisme $g = f - \mathrm{Id}$, où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$, est de rang 1.

Éléments de correction

Par théorème, on sait que : $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\,(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$

Un calcul direct donne que :
$$\left\{\begin{aligned} g(e_1) &= (0,0,0) \\ &= \overrightarrow{0} \\ g(e_2) &= (0,-1,1) \\ &= -e_2 + e_3 \\ g(e_3) &= (0,-1,1) \\ &= -e_2 + e_3 \end{aligned}\right.$$

et par suite que : $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\,(g(e_3))$
ce qui assure que $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 1$ et donc que $\mathrm{rg}(g) = 1$.

Q29. Démontrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

Éléments de correction

D'après le théorème du rang, on a que : $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{rg(g)}_{=1} + \dim(\mathrm{Ker}(g))$

ce qui donne que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 2$.

On a déjà que $g(e_1) = \overrightarrow{0}$ et donc que $u_1 \in \mathrm{Ker}(g)$.
Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} g(u_2) &= (f - \mathrm{Id})(u_2) \\ &= f(u_2) - u_2 \\ &= (0,1,-1) - u_2 \\ &= u_2 - u_2 \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$
et donc $u_2 \in \mathrm{Ker}(g)$.
La famille $\mathcal{F}$ étant formée de deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(g)$ qui sont non nuls et non colinéaires, elle forme donc une famille libre de 2 vecteurs $\mathrm{Ker}(g)$ qui est lui même de dimension 2. Donc par théorème, la famille $\mathcal{F}$ en forme une base.

Q30. Déterminer un vecteur $u_3 = (1, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que l'on ait : $f(u_3) - u_3 = u_2$.

Éléments de correction

En notant $u = (x, y, z)$, on a donc :

$$\begin{aligned} (f(u) - u = u_2) &\Leftrightarrow ((x, -z, y+2z) - (x,y,z) = (0,1,-1)) \\ &\Leftrightarrow ((y - z, y + z) = (0,1,-1)) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left(u \in \mathrm{Vect}\left(\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

et par suite, on peut prendre $u_3 = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Q31. Montrer que la famille $\mathcal{C}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

On note $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{C}_1$ dans la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
Par théorème : $\left(\mathcal{C}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3\right) \Leftrightarrow (K \text{ est inversible})$
Un échelonnement en lignes donnera que $\mathrm{rg}(K) = 3$, et donc que K est inversible, et par suite $\mathcal{C}_1$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q32. Sans calculs supplémentaires, justifier que la famille $\mathcal{C}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

On ne change pas le caractère libre ou générateur d'une famille si l'on remplace un vecteur par un vecteur colinéeaire (non nul) à ce dernier, ce qui est le cas puisque l'on remplace dans $\mathcal{C}_1$ par $-u_2$ dans la famille $\mathcal{C}_2$.

Q33. Déterminer la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{C}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{C}_2$.

Éléments de correction

Construction de M_1 : Puisque $\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$, on a déjà que $\begin{cases} g(u_1) &= \overrightarrow{0} \\ g(u_2) &= \overrightarrow{0} \end{cases}$
et comme $g(u_1) = f(u_1) - u_1$ il vient que $f(u_1) = u_1$, et sur le même principe, $f(u_2) = u_2$.
Par ailleurs, par construction on a $f(u_3) = u_2 + u_3$, et il vient que la matrice M_1 est : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Construction de M_2 : Comme précdemment on a $g(u_1) = f(u_1) - u_1$ il vient que $f(u_1) = u_1$, et sur le même principe, $f(u_2) = u_2$. Donc par linéarité, il vient que $f(-u_2) = -u_2$.
Par ailleurs, par construction on a $f(u_3) = u_2 + u_3$ ou encore $f(u_3) = -1 \times u_2 + u_3$, et il vient que la matrice M_2 est : $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q34. Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, puis calculer $M_1 M_2$.

Éléments de correction

En notant Q la matrice de passage de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ d'après les formules de changement de bases pour les endomorphismes, il vient que $M_2 = Q^{-1} M_1 Q$, et donc que M_1 et M_2 sont semblables.
Par ailleurs, un calcul direct donne que $M_1 M_2 = \mathrm{I}_3$ ce qui assure que M_1 et M_2 sont inverses l'une de l'autre.

Q35. En déduire que M et M^{-1} sont inversibles.

Éléments de correction

De ce qui précède, on a donc : $(M_1)^{-1} = Q^{-1} M_1 Q$.
Par ailleurs, en notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{C}_1$, on sait que $M_1 = P^{-1} M P$.
De plus, par produit de matrices inversibles, il vient que : $(M_1)^{-1} = P M^{-1} P^{-1}$
et finalement il vient que : $Q^{-1} M_1 Q = P M^{-1} P^{-1}$
ou encore que : $Q^{-1} P^{-1} M P Q = P M^{-1} P^{-1}$
qui donne que : $(PQ)^{-1} M P Q = P M^{-1} P^{-1}$
puis finalement que : $P^{-1} (PQ)^{-1} M P Q P = M^{-1}$
et donc que : $(PQP)^{-1} M P Q P = M^{-1}$
ce qui assure le caractère semblable des matrices M_1 et M_2.

Problème n° 3 | Calcul de la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

On admettra le résultat suivant : $\forall x \in \left]0;1\right], \forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Partie A | Calcul préliminaire

Q36. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right) \cos(kx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}$$

Éléments de correction

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'intégration par parties suivante où l'on pose :
$$\begin{array}{lcl} u(x) = \dfrac{x^2}{2\pi} - x & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \dfrac{x}{\pi} - 1 \\ v(x) = \dfrac{1}{k}\sin(kx) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \cos(kx) \end{array}$$
où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{k}\left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\sin(kx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{1}{k}\frac{\pi^2}{2\pi}\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} - \frac{1}{k}\frac{0^2}{2\pi}\underbrace{\sin(k0)}_{=0}}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Une deuxième intégration par parties donnera en posant :
$$\begin{array}{lcl} u(x) = \dfrac{x}{\pi} - 1 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \dfrac{x}{\pi} \\ v(x) = -\dfrac{1}{k}\cos(kx) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \sin(kx) \end{array}$$
où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{x^2}{2\pi} - x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{k}\left(\left[-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\cos(kx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\frac{1}{k}\cos(kx) \times \frac{1}{\pi}\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{k}\left(\left(-\frac{1}{k}\underbrace{\left(\frac{\pi}{\pi} - 1\right)}_{=0}\cos(\pi x) + \frac{1}{k}\left(\frac{0}{\pi} - 1\right)\underbrace{\cos(0x)}_{=1}\right) + \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{k}\left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2\pi}\underbrace{\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^\pi}_{=0} \\
&= \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Partie B | Lemme de Lebesgues pour une fonction g donnée

Dans cette partie, on considère g la fonction définie par :

$$g : \left| \begin{array}{ccl} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\dfrac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0;\pi] \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Q37. Déterminer la limite de g en 0. Qu'en conclure pour g ?

Éléments de correction

On remarque tout d'abord que :
$$\begin{aligned}
\forall x \in]0;\pi],\ g(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{x\left(\dfrac{x}{2\pi} - 1\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}} \times \left(\frac{x}{2\pi} - 1\right)
\end{aligned}$$

On sait que $\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 1$, et comme $\dfrac{x}{2} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, par composition, on en déduit que $\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$.
Par ailleurs, on a clairement que $\dfrac{x}{2\pi} - 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} -1$, il vient par quotient que $g(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} -1$.
Par suite, puisque $g(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} -1$ et que $-1 = g(0)$, on en déduit que g est continue en 0.

Q38. On admet que la fonction g est dérivable sur $[0;\pi]$ et que g' est dérivable sur $[0;\pi]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'on a :

$$\int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\left(g(0) - g(\pi)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) + \int_0^\pi g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right)$$

Éléments de correction

On effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{rcl} u(x) = g(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = g'(x) \\ v(x) = -\dfrac{2}{2n+1}\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right) \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$ pour obtenir que :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2}{2n+1}g(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{2}{2n+1}g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{2n+1}g(\pi)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) + \frac{2}{2n+1}g(0)\underbrace{\cos(0)}_{=1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{2n+1}\left(g(0) - g(\pi)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{2n+1}\left(g(0) - g(\pi)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) + \int_0^\pi g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

Q39. Justifier qu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que : $\left|g(0) - g(\pi)\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)\right| \leq 2K$.

Éléments de correction

D'après l'inégalité triangulaire, on a : $\left|g(0) - g(\pi)\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)\right| \leq |g(0)| + |g(\pi)|\left|\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)\right|$.
La fonction $\cos$ étant bornée sur $\mathbb{R}$ et majorée en valeur absolue par 1, il vient que : $0 \leq |g(\pi)|\left|\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)\right| \leq g(\pi)$.
Par ailleurs, la fonction g étant continue sur $[0;\pi]$, elle est bornée sur $[0;\pi]$ et donc il existe $K \geq 0$ tel que : $\forall x \in [0;\pi]\,,\ |g(x)| \leq K$
Finalement, on a donc $g(0) \leq K$ et $g(\pi) \leq K$.
On en déduit donc que : $absg(0) - g(\pi)\cos\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right) \leq 2K$.

Q40. Justifier qu'il existe un réel $K' \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\displaystyle\int_0^\pi g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right| \leq K'\pi$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a tout d'abord que : $\left|\displaystyle\int_0^\pi g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^\pi \left|g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right|\,\mathrm{d}x$

La fonction cos étant bornée sur $\mathbb{R}$ et majorée en valeur absolue par 1, il vient que :

$$\forall x \in [0;\pi]\,,\ 0 \leq \left| g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right| \leq |g'(x)|$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\displaystyle\int_0^\pi \left| g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right| \,\mathrm{d}x \leq \int_0^\pi |g'(x)|\,\mathrm{d}x$

Par ailleurs, la fonction g' étant continue sur $[0;\pi]$, elle est bornée sur $[0;\pi]$ et donc il existe $K' \geq 0$ tel que : $\forall x \in [0;\pi]\,,\ |g'(x)| \leq K'$

Là encore, par croissance de l'intégrale on en déduit que : $\displaystyle\int_0^\pi |g'(x)|\,\mathrm{d}x \leq \underbrace{\int_0^\pi K'\,\mathrm{d}x}_{=K'\pi}.$

Q41. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Éléments de correction

On a tout d'abord que :

$$\left|\int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{2n+1}\left(\left|g(0)-g(\pi)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right| + \left|\int_0^\pi g'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right|\right)$$

et ainsi que : $\displaystyle\left|\int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{2n+1}\left(2K+K\pi\right)$

Il est clair que $\displaystyle\frac{2}{2n+1}\left(2K+K\pi\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc d'après le théorème d'encadrement que $\displaystyle\left|\int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $\displaystyle\int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Partie C | Somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

L'objet de cette partie est de calculer la somme de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$.

Q42. Rappeller pourquoi la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Éléments de correction

$\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente puisque $2 > 1$.

Q43. Montrer que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x.$

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la partie A, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x \right) \cos(kx)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \int_0^{\pi} \left(\left(\frac{x^2}{2\pi} - x \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \right) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \left(\left(\frac{x^2}{2\pi} - x \right) \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} 2g(x) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} g(x) \left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{2\pi} - x \right) \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{6\pi} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Q44. Montrer alors que la somme de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Éléments de correction

D'après la question précédente, on a que : $\int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par suite, il vient que : $\frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$, ce qui signifie que la suite des sommes partielles de la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{k^2}$ admet une limite finie et ainsi par définition, que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{k^2}$ est convergente et que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.