Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Problème n° 1 | Équations différentielles dans $\mathbb{R}[x]$

Soit $p \in \mathbb{N}$ et P un polynôme à coefficient réels de degré p.
On considère alors le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, Q(x) = \left(x^2+1\right) P''(x) + 4P'(x) - 2P(x)$$

Q1. Montrer que si p est différent de 2, alors Q est de degré p, et si $p = 2$, alors Q est de degré au plus 1.
Qu'en conclure pour le degré de Q ?

Q2. Montrez que si R est un polynôme non nul vérifiant la relation $(\star)$ ci-dessous, alors R est de degré 2.

$$(\star) : \quad \forall x \in \mathbb{R},\, \left(x^2+1\right) R''(x) + 4R'(x) - 2R(x) = 0$$

Q3. Déterminer alors tous les polynômes qui vérifient la relation $(\star)$.

Q4. On se propose dans tout ce qui suit de déterminer tous les polynômes R qui vérifient l'égalité $(\heartsuit)$ ci-dessous :

$$(\heartsuit) : \quad \forall x \in \mathbb{R},\, \left(x^2+1\right) R''(x) + 4R'(x) - 2R(x) = x$$

Déterminer un polynôme R_1 de degré 1 qui vérifie $(\heartsuit)$.

Q5. Montrer qu'un polynôme R vérifie la relation $(\heartsuit)$ si, et seulement si, le polynôme $R - R_1$ vérifie la relation $(\star)$.

Q6. En déduire tous les polynômes qui vérifient la relation $(\heartsuit)$.

Problème n° 2 | Comparaison de deux jeux

On s'intéresse à deux jeux, d'apparence similaire.

Partie A | Premier jeu

Jeu n° 1

On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11 et si elle tombe sur face, on perd 10. On recommence un certain nombre de fois avec des lancers que l'on suppose indépendants.

Pour $i \geq 1$, on note X_i la variable aléatoire égale à 11 si la i^{e} pièce tomnbe sur pile et égale à -10 si elle tombe sur face.

Q7. Calculer l'espérance $\mathbb{E}\left(X_i\right)$ de X_i pour $i \geq 1$.

Q8. On note $S_0 = 100$ le montant initial et S_n le montant obtenu[1] après n lancers.
Pour $n \geq 1$, exprimer S_n en fonction des X_i où $i \geq 1$.

Q9. Calculer la probabilité de l'événement $[S_2 = k]$ pour tout entier k.

1. énoncé imprécis que j'interprête personnellement ainsi : S_n est le montant dont on dispose après n lancers

Q10. Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$.

Q11. Montrer que $\mathbb{P}([S_{10} \geq 160]) \leq \frac{2}{3}$.

Q12. Montrer que $\mathbb{P}\left(\left[S_n \geq 100 + \frac{n}{4}\right]\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q13. On suppose maintenant qu'on arrête le jeu dès que le montant S_n devient inférieur ou égal à 89 ou supérieur ou égal à 105. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de pièces lancées avant l'arrêt du jeu.
Calculer $\mathbb{P}([T = 1])$ et $\mathbb{P}([T = 2])$.

Q14. Si $T \geq 3$, que vaut S_2 ?

Q15. Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant supérieur à 100 sachant que l'on a tiré 3 pièces ou moins.

Q16. Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant égal à 105 ?

Partie B | Deuxième jeu

Jeu n° 2

On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11% de notre montant et si elle tombe sur face, on perd 10% de notre montant. On recommence un certain nombre de fois avec des lancers que l'on suppose indépendants.

La différence avec le jeu précédent est que le gain ou la perte sont maintenant des pourcentages du montant.
Pour $i \geq 1$, on note Y_i la variable aléatoire égale à $1,11$ si la i^{e} pièce tombe sur pile et égale à $0,9$ si elle tombe sur face.

Q17. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y_i)$ pour $i \geq 1$.

Q18. On note $\Pi_0 = 100$ le montant initial et Π_n le montant obtenu[2] après n lancers.
Pour $n \geq 1$, exprimer Π_n en fonction des Y_i où $i \geq 1$

Q19. Pour $n \geq 0$, calculer $\mathbb{E}(\Pi_n)$.

Q20. Soit $i \geq 1$. On note $\alpha = -\mathbb{E}(\ln(Y_i))$. Montrer que $\alpha > 0$.

Q21. Montrer que $\mathbb{P}\left(\left[\Pi_n \leq 100\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}n}\right]\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q22. En quoi ce second jeu peut-il paraître paradoxal ?

Q23. Si vous aviez le choix, préfériez-vous jouer au premier jeu ou au second ? Justifier brièvement votre réponse.

2. voir remarque précédente

Problème n° 3 | Comparaison de protocoles de tests

On chercher à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple « être malade » ou « être donneur compatible »).

On fixe $q \in]0;1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de ne pas posséder la propriété recherchée.

Le résultat d'une analyse est dit **positif** si la propriété est présente, **négatif** si elle ne l'est pas.

L'objet de ce problème consiste en la comparaison de différents protocoles de tests.

On rappelle que la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B est noté $\mathbb{P}(A \mid B)$, et on pourra admettre le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\, \sum_{i=1}^{n} i x^{i-1} = \frac{1 + n x^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}$$

Partie A | Recherche de toutes les personnes possédant la propriété

On veut trouver toutes les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geq 2$.

Protocole A

On mélange le sang des n personnes et l'on fait une analyse de ce mélange. Si le résultat est négatif on s'arrête. S'il est positif, on analyse individuellement le sang de chacune des n personnes.

On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole A pour n personnes.

Q24. Pourquoi s'arrête-t-on si le premier résultat est négatif ?

Q25. Quelles valeurs peut prendre A_n ?

Q26. Déterminer la loi de A_n.

Q27. Montrer que l'espérance de A_n est $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.

Q28. On considère un entier k tel que $1 \leq k < n$. Calculer la probabilité conditionnelle que les k premières personnes testées soient toutes négatives, sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.

Protocole B

On fait un test pour chacune des personnes.

Q29. À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole A qu'avec le protocole B ? On exprimera le résultat en fonction de n.

Q30. Déterminer la limite à droite en 0 de la fonction $x \longmapsto x^x$.

Q31. Justifier que, pour n assez grand, le protocole B est préférable au protocole A.

Partie B | Recherche d'une personne possédant la propriété

On veut dorénavant trouver une personne possédant la propriété recherchée, au sein d'une population que l'on suppose infinie.

Protocole C

On teste toutes les personnes une par une, jusqu'à en trouver une qui possède la propriété.

On note C la variable aléatoire qui indique le rang de la première personne possédant la propriété, c'est à dire que $C = j$ si la j^{e} personne est la première à posséder la propriété. Ainsi, C compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant le protocole C.

On rappelle que q est la probabilité de ne pas posséder la propriété recherchée et on note $p = 1 - q$ la probabilité de la posséder.

Q32. Donner la loi de C.

Q33. Donner, sans justification, l'espérance de C.

On va maintenant procéder par regroupement. On fixe un entier $n \geq 2$, qui désignera la taille des groupes. Ainsi, le premier groupe contiendra les n premières personnes, le second groupe contiendra les n suivantes, et ainsi de suite.

Protocole D

On mélange le sang des n personnes du premier groupe et on le teste. Si le résultat est négatif, on procède de façon similaire avec le groupe suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un test positif. On teste ensuite une par une les personnes du groupe dont le test est positif, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété.

On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc.

Soit k un entier strictement positif.

Q34. Exprimer l'événement $[G > k]$ en fonction de la variable aléatoire C.

Q35. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([G > k])$.

Q36. Reconnaître la loi de G.

On note X la variable aléatoire représentant le numéro de la première personne à avoir un test positif au sein de son groupe. Par exemple, si c'est la cinquième personne du second groupe qui donne le premier test positif, cela signifie que $G = 2$ et $X = 5$.

Q37. Quelles valeurs peut prendre X ?

Q38. Pour $k \geq 1$ et $i \in [\![1;n]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}([X = i] \mid [G = k])$, c'est à dire la probabilité que l'événement $[X = i]$ est réalisé sans que l'événement $[G = k]$ est réalisé.

Q39. Calculer la limite de cette quantité lorsque q tend vers 1.

Q40. Montrer que X et G sont indépendantes.

Q41. Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)(1-q^n)}$.

Q42. On note D le nombre de tests effectués avec le protocole D.
Exprimer en fonction des valeurs prises par G et par X, l'événement $[D = 3]$.

Q43. Trouver une relation entre D, G et X.

Q44. Soit un entier $j \geq 1$. Montrer que : $\mathbb{P}([D = j]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}([C = (k-1)n + j - k])$.

Q45. Calculer $\mathbb{E}(D)$.

Q46. À n fixé, calculer la limite du quotient $\dfrac{\mathbb{E}(D)}{\mathbb{E}(C)}$ lorsque q tend vers 1. Interpréter ce résultat.