Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Études de séries numériques construites à partir de la suite de Fibonnacci

Dans toute problème, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dite suite de Fibonacci, définie par :

$$\begin{cases} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \end{cases}$$

Partie A | Explicitation du terme général de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q1. Résoudre l'équation $r^2 = r + 1$ d'inconnue le réel r.

Q2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Q3. Déterminer alors la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q4. Démontrer que $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \omega$ où l'on a posé $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie B | Étude d'une première série télescopique

Dans tout cette partie, on s'intéresse à la série numérique $\sum \dfrac{f_{n-1}}{f_n f_{n+1}}$.

On désigne alors par $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, c'est à dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f_{k-1}}{f_k f_{k+1}}$

Q5. Exprimer S_n en fonction de f_1 et de f_{n+1}.

Q6. Déduire de ce qui précède la convergence et la somme de la série $\sum \dfrac{f_{n-1}}{f_n f_{n+1}}$.

Partie C | Étude d'une deuxième série téléscopique

Dans tout cette partie, on s'intéresse à la série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{f_n f_{n+1}}$.

On désigne alors par $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, c'est à dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{f_k f_{k+1}}$

Q7. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (f_{n+1})^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$.

Q8. Exprimer T_n en fonction de f_1, f_2, f_{n+1} et f_{n+2}.

Q9. Déduire de ce qui précède la convergence et la somme de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{f_n f_{n+1}}$.

Partie D | Étude d'une troisième série

Dans toute cette partie, on s'intéresse à la série numérique $\sum f_n x^n$ où x est un réel strictement positif quelconque.
On pourra admettre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs à partir du rang 1.

Q10. Montrer que la série $\sum f_n x^n$ est convergente si, et seulement si $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Pour les questions qui suivent, pour $\neq 0$ tel que $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, on désignera alors par $\Phi(x)$ la somme de la série $\sum f_n x^n$.

Q11. Soit $x \neq 0$ tel que $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Démontrer que : $\Phi(x) = x + x\Phi(x) + x^2\Phi(x)$.

Q12. En déduire alors que pour $x \neq 0$ tel que $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Problème n° 2 | Études d'endomorphismes nilpotents

On rappelle que l'on désigne par $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, et on note $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.

Partie A | Étude d'un premier endomorphisme

On désigne par f l'application définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y+z, -2x+y-z, -6x+3y-3z) \end{array} \right.$

Q13. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q14. Déterminer alors la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Q15. Déterminer une base de l'image de f.

Q16. En déduire une base du noyau de f.

Q17. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Q18. Démontrer que $\mathrm{Im}\,(f)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\,(f)$.

Q19. On rappelle que l'on note $f^2 = f \circ f$. Démontrer que f^2 est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

Q20. Dans toute la fin de cette partie, on désigne par u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\,(f)$, et on désigne par v le vecteur de $\mathbb{R}^3$ donné par $v = f(u)$.

Démontrer que l'on peut choisir un autre vecteur w de $\mathrm{Ker}\,(f)$ non colinéaire à v et tel que la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q21. Déterminer alors la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

Partie B | Étude d'un deuxième endomorphisme

Dans cette partie, on désigne par g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On rappelle que l'on note $g^2 = g \circ g$ et $g^3 = g \circ g \circ g$.

Q22. Déterminer les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ des endomorphismes g^2 et g^3.

Q23. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,\left(g^2\right)$.

Q24. Déterminer une base du noyau de g et de g^2.

Q25. Déduire de ce qui précède une base de $\mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,\left(g^2\right)$.

Q26. Dans toute la fin de cette partie, on désigne par u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\,\left(g^2\right)$, et on note v et w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par $v = g(u)$ et $w = g(v)$.

Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q27. Déterminer alors la matrice B' de g dans la base $\mathcal{C}$.

Partie C | Généralisation

On suppose que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ différent de l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$ et tel que $\Phi \circ \Phi$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

Q28. Justifier qu'il existe un vecteur u non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Phi(u) \neq \overrightarrow{0}$.

Q29. Soit y un vecteur de $\mathrm{Im}\ (\Phi)$. Démontrer que $\Phi(y) = \overrightarrow{0}$.

Qu'en déduire pour $\mathrm{Im}\ (\Phi)$ et $\mathrm{Ker}\ (\Phi)$?

Q30. Démontrer alors que $\mathrm{rg}\ (\Phi) = 1$ et que $\dim\left(\mathrm{Ker}\ (\Phi)\right) = 2$.

Q31. Construire à l'aide du vecteur u précédemment défini et Φ, une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice M de Φ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie D | Généralisation (suite)

Dans cette partie, Ψ désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que Ψ^2 n'est pas l'endomorphisme nul mais où Ψ^3 est l'endomorphisme nul.

Q32. Justifier qu'il existe un vecteur u non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Psi^2(u) \neq \overrightarrow{0}$.

Q33. Démontrer que $\mathrm{Im}\ (\Psi) \subset \mathrm{Ker}\ \left(\Psi^2\right)$.

Q34. Démontrer que $\mathrm{Im}\ \left(\Psi^2\right) \subset \mathrm{Ker}\ (\Psi)$.

Q35. Démontrer que $\mathrm{Ker}\ (\Psi) \subset \mathrm{Ker}\ \left(\Psi^2\right)$.

Q36. Construire à l'aide du vecteur u précédemment défini et Ψ, une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice N de Φ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problème n° 3 | Étude de fonctions

On considère les deux fonctions f et g données par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1-(2x+1)\ln(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2+x} \end{array} \right.$$

dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives dans un repère orthogonal du plan.

Partie A | Étude d'une fonction intermédiaire

On considère $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+2x\ln(x)+1 \end{array} \right.$.

Q37. Déterminer les variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q38. En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B | Étude des variations de f

Q39. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.

Q40. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Q41. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q42. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $f(x) = 0$.

Partie C | Étude des variations de g

Q43. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.

Q44. Exprimer $g(\alpha)$ en fonction de α.

Q45. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Q46. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q47. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.