Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Problème n° 1 | Équations différentielles dans $\mathbb{R}[x]$

Soit $p \in \mathbb{N}$ et P un polynôme à coefficient réels de degré p.
On considère alors le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \left(x^2+1\right) P''(x) + 4P'(x) - 2P(x)$$

Q1. Montrer que si p est différent de 2, alors Q est de degré p, et si $p = 2$, alors Q est de degré au plus 1.
Qu'en conclure pour le degré de Q ?

Q 1| Éléments de réponse

En notant $a_p \neq 0$ le coefficient du monôme de plus haut degré de P, par opérations sur les degrés, le monôme de plus haut degré de Q est $\left(p^2 - p - 2\right) a_p x^p$ et ainsi Q est de degré au plus p. Ainsi :

- **Supposons que** $p = 2$ **:** dans ce cas là, Q est donc de degré au plus 2 et notamment le coefficient du monôme de degré 2 est nul, ce qui assure que Q est de degré au plus 1.
- **Supposons que** $p \neq 2$ **:** dans ce cas, Q est au plus de degré p, mais le coefficient du monôme de degré p est non nul, ce qui assure que Q est exactement de degré p.

On en déduit que soit Q est de degré au plus 1, soit Q est de degré p.

Q2. Montrez que si R est un polynôme non nul vérifiant la relation $(\star)$ ci-dessous, alors R est de degré 2.

$$(\star) : \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right) R''(x) + 4R'(x) - 2R(x) = 0$$

Q 2| Éléments de réponse

Supposons que R vérifie $(\star)$, et supposons que R soit de degré p et on note $a_p \neq 0$ son coefficient du monôme de plus haut degré.
En reprenant les éléments précédents le monôme de plus haut degré du polynôme $Q : x \longmapsto \left(x^2+1\right) R''(x) + 4R'(x) - 2R(x)$ est alors $\left(p^2 - p - 2\right) a_p x^p$.
Mais comme Q est le polynôme nul, par identification des coefficients, il vient alors que $p^2 - p - 2 = 0$ ce qui amène à $p = 2$ ou $p = -1$, ce deuxième cas est impossible.
Par conséquent R est degré 2.

Q3. Déterminer alors tous les polynômes qui vérifient la relation $(\star)$.

Q 3| Éléments de réponse

D'après la question précédente, les solutions de $(\star)$ sont des polynômes du second degré.
On a donc par identification des coefficients des différents polynômes mis en jeu :

$$\begin{aligned}
\left(R : x \longmapsto ax^2 + bx + c \text{ est solution de } (\star)\right) &\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right) R''(x) + 4R'(x) - 2R(x) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ (-8a-2b)x + (2a+4b-2) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -8a - 2b = 0 \\ 2a + 4b - 2c = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = -4a \\ c = -7a \end{cases},\ a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi, les polynômes solutions de $(\star)$ sont les polynômes R de la forme :

$$R : x \longmapsto ax^2 - 4ax - 7a,\ a \in \mathbb{R}$$

Q4. On se propose dans tout ce qui suit de déterminer tous les polynômes R qui vérifient l'égalité $(\heartsuit)$ ci-dessous :

$$(\heartsuit) : \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right) R''(x) + 4R'(x) - 2R(x) = x$$

Déterminer un polynôme R_1 de degré 1 qui vérifie $(\heartsuit)$.

Q 4| Éléments de réponse

On a donc par identification des coefficients des différents polynômes mis en jeu :

$$\begin{aligned}
(R : x \longmapsto mx+p \text{ est solution de } (\heartsuit)) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right) R''(x) + 4R'(x) - 2R(x) = x\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{R},\ -2mx + 4m - 2p = x) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2m = 1 \\ 4m - 2p = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m = -\dfrac{1}{2} \\ p = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, le seul polynôme de degré 1 solution de $(\heartsuit)$ est le polynôme $R : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}x - 1$.

Q5. Montrer qu'un polynôme R vérifie la relation $(\heartsuit)$ si, et seulement si, le polynôme $R - R_1$ vérifie la relation $(\star)$.

Q 5| Éléments de réponse

Supposons que $R - R_1$ vérifie $(\star)$: on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right)(R-R_1)''(x) + 4(R-R_1)'(x) - 2(R-R_1)(x) = 0$$

c'est à dire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right) R(x) + 4R'(x) - 2R(x) \underbrace{- \left(x^2+1\right) R_1(x) - 4R_1'(x) + 2R_1(x)}_{=-x} = 0$

ce qui donne bien que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right) R(x) + 4R'(x) - 2R(x) = x$.

et donc R vérifie $(\heartsuit)$

Supposons que R vérifie $(\heartsuit)$: on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right) R(x) + 4R'(x) - 2R(x) = x$$

Par ailleurs, on sait que R_1 est aussi solution de $(\heartsuit)$.

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right) R(x) + 4R'(x) - 2R(x) - \left(\left(x^2+1\right) R_1(x) + 4R_1'(x) - 2R_1(x)\right) = x - x$

ce qui donne bien que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2+1\right)(R-R_1)''(x) + 4(R-R_1)'(x) - 2(R-R_1)(x) = 0$

et donc que $R - R_1$ vérifie $(\star)$.

Q6. En déduire tous les polynômes qui vérifient la relation $(\heartsuit)$.

Q 6| Éléments de réponse

Tous les polynômes qui vérifient la relation $(\heartsuit)$ sont donc les polynômes :

$$x \longmapsto ax^2 - \left(\frac{1}{2} + 4a\right)x - 7a - 1,\ a \in \mathbb{R}$$

Problème n° 2 | Comparaison de deux jeux

On s'intéresse à deux jeux, d'apparence similaire.

Partie A | Premier jeu

Jeu n° 1

On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11 et si elle tombe sur face, on perd 10. On recommence un certain nombre de fois avec des lancers que l'on suppose indépendants.

Pour $i \geq 1$, on note X_i la variable aléatoire égale à 11 si la i^{e} pièce tomnbe sur pile et égale à -10 si elle tombe sur face.

Q7. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_i)$ de X_i pour $i \geq 1$.

Q 7| Éléments de réponse

On commence par noter tout d'abord que $X_i(\Omega) = \{11, -10\}$, ce qui assure que X_i admet une espérance qui par définition vaut $\mathbb{E}(X_i) = 11\mathbb{P}([X_i = 11]) - 10\mathbb{P}([X_i = -10])$ et donc il vient que $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{1}{2}$ puisque $\mathbb{P}([X_i = -10]) = \mathbb{P}([X_i = 11]) = \dfrac{1}{2}$.

Q8. On note $S_0 = 100$ le montant initial et S_n le montant obtenu [1] après n lancers.
Pour $n \geq 1$, exprimer S_n en fonction des X_i où $i \geq 1$.

Q 8| Éléments de réponse

Il est immédiat que $S_n = 100 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Q9. Calculer la probabilité de l'événement $[S_2 = k]$ pour tout entier k.

Q 9| Éléments de réponse

D'après ce qui précède, $S_2 = 100 + X_1 + X_2$ et on en déduit que $S_2(\Omega) = \{80, 101, 122\}$.
Compte-tenu du protocole de jeu, les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

On a alors :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_2 = 80]) &= \mathbb{P}([X_1 = -10] \cap [X_2 = -10]) \\
&\underset{\substack{X_1, X_2 \\ \text{indép.}}}{=} \mathbb{P}([X_1 = -10]) \times \mathbb{P}([X_2 = -10]) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

De même :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_2 = 101]) &= \mathbb{P}(([X_1 = 11] \cap [X_2 = -10]) \cup ([X_1 = -10] \cap [X_2 = 11])) \\
&\underset{\substack{\text{union} \\ \text{disjointe}}}{=} \mathbb{P}([X_1 = 11] \cap [X_2 = -10]) + \mathbb{P}([X_1 = -10] \cap [X_2 = 11]) \\
&\underset{\substack{X_1, X_2 \\ \text{indép.}}}{=} \mathbb{P}([X_1 = 11]) \times \mathbb{P}([X_2 = -10]) + \mathbb{P}([X_1 = -10]) \times \mathbb{P}([X_2 = 11]) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Sur le même principe, on obtiendrait que $\mathbb{P}([S_2 = 122]) = \dfrac{1}{4}$.

Q10. Pour $n \geq 0$, calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$.

Q 10| Éléments de réponse

Par linéarité de l'espérance, on a que $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(100) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$ ce qui donne que $\mathbb{E}(S_n) = 100 + \dfrac{n}{2}$

1. énoncé imprécis que j'interprête personnellement ainsi : S_n est le montant dont on dispose après n lancers

Q11. Montrer que $\mathbb{P}([S_{10} \geq 160]) \leq \dfrac{2}{3}$.

Q 11| Éléments de réponse

Puisque $S_{10} = 100 + \sum_{i=1}^{10} X_i$, on a nécessairement $S_{10} \geq 0$, et comme $160 > 0$, d'après l'inégalité de Markov, il vient que :

$$\mathbb{P}([S_{10} \geq 160]) \leq \frac{\mathbb{E}(S_{10})}{160}$$

et comme $\mathbb{E}(S_{10}) = 100 + \dfrac{10}{2}$, il vient que $\mathbb{P}([S_{10} \geq 160]) \leq \dfrac{105}{160}$ et donc que $\mathbb{P}([S_{10} \geq 160]) \dfrac{2}{3}$.

Q12. Montrer que $\mathbb{P}\left(\left[S_n \geq 100 + \dfrac{n}{4}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q 12| Éléments de réponse

On a tout d'abord que : $\left[S_n < 100 + \dfrac{n}{4}\right] = \left[S_n - \mathbb{E}(S_n) < -\dfrac{n}{4}\right] \subset \left[|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \dfrac{n}{4}\right]$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\left[S_n < 100 + \frac{n}{4}\right]\right) \leq \mathbb{P}\left(\left[|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \frac{n}{4}\right]\right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\left(\frac{n}{4}\right)^2}$$

Comme $S_n = 100 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, il vient que $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$, et par indépendance des X_k, $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$.
Compte-tenu de la construction des X_k, il est immédiat que $\mathbb{V}(X_k)$ existe et est indépendant de n, et que par ailleurs, puisque les X_k suivent toutes la même loi, elles ont la même variance notée v.
On a donc $\mathbb{V}(S_n) = n \times v$ ce qui donne finalement que : $0 \leq \mathbb{P}\left(\left[S_n < 100 + \dfrac{n}{4}\right]\right) \dfrac{4v}{n}$
et comme $\dfrac{4v}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par le théorème d'encadrement on a $\mathbb{P}\left(\left[S_n < 100 + \dfrac{n}{4}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$.

Q13. On suppose maintenant qu'on arrête le jeu dès que le montant S_n devient inférieur ou égal à 89 ou supérieur ou égal à 105. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de pièces lancées avant l'arrêt du jeu.
Calculer $\mathbb{P}([T = 1])$ et $\mathbb{P}([T = 2])$.

Q 13| Éléments de réponse

Par construction $S_1(\Omega) = \{90, 111\}$ donc on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T = 1]) &= \mathbb{P}([S_1 \leq 89] \cup [S_1 \geq 105]) \\
&\underset{\substack{\text{union}\\\text{disjointe}}}{=} \mathbb{P}([S_1 \leq 89]) + \mathbb{P}([S_2 \geq 105]) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

De même, puisque $S_2(\Omega) = \{80, 101, 122\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T = 2]) &= \mathbb{P}(([S_1 = 90] \cap [S_2 = 80]) \cup ([S_1 = 90] \cap [S_2 = 101]) \cup ([S_1 = 90] \cap [S_2 = 122])) \\
&\underset{\substack{\text{union}\\\text{disjointe}}}{=} \mathbb{P}([S_1 = 90] \cap [S_2 = 80]) + \underbrace{\mathbb{P}([S_1 = 90] \cap [S_2 = 101]) + \mathbb{P}([S_1 = 90] \cap [S_2 = 122])}_{=0} \\
&= \mathbb{P}([S_1 = 90] \cap [S_2 = 80]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 = -10] \cap [X_2 = -10]) \\
&\underset{\substack{X_1, X_1\\\text{indép.}}}{=} \mathbb{P}([X_1 = -10]) \times \mathbb{P}([X_2 = -10]) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Q14. Si $T \geq 3$, que vaut S_2 ?

Q 14| Éléments de réponse

Supposons $T \geq 3$. On ne peut avoir que $S_1 = 90$ car sinon si $S_1 = 111$, le jeu s'arrête et $T = 1$, et donc S_2 devra valoir 101 puisque sur le même raisonnement le cas $S_2 = 80$ arrête le jeu, ainsi que le cas $S_2 = 122$ qui est exclu si $S_1 = 90$.

Q15. Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant supérieur à 100 sachant que l'on a tiré 3 pièces ou moins.

Q 15| Éléments de réponse

On cherche donc à calculer $\mathbb{P}\left([S_T \geq 100] \mid [T \geq 3]\right)$.

Par définition, on a : $\mathbb{P}\left([S_T \geq 100] \mid [T \geq 3]\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left([T \leq 3] \cap [S_T \geq 100]\right)}{\mathbb{P}\left([T \leq 3]\right)}$.

En raisonnant comme précédemment, on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([T \geq 3] \cap [S_T \geq 100]\right) &= \mathbb{P}\left([S_1 = 111]\right) + \mathbb{P}\left([S_1 = 90] \cap [S_2 = 101] \cap [S_3 = 112]\right) \\
&\underset{\substack{S_1, S_2, S_3 \\ \textbf{indép.}}}{=} \frac{1}{2} + \mathbb{P}\left([S_1 = 90]\right)\mathbb{P}\left([S_2 = 101]\right)\mathbb{P}\left([S_3 = 112]\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Sur le même principe :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left([T \leq 3]\right) &= \mathbb{P}\left([S_1 = 111]\right) + \mathbb{P}\left([S_1 = 90] \cap [S_2 = 80]\right) + \mathbb{P}\left([S_1 = 90] \cap [S_2 = 100] \cap [S_3 = 112]\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

et finalement il vient que : $\mathbb{P}\left([S_T \geq 100] \mid [T \geq 3]\right) = \dfrac{5}{7}$.

Q16. Quelle est la probabilité de s'arrêter avec un montant égal à 105 ?

Q 16| Éléments de réponse

On cherche donc $\mathbb{P}\left([S_T = 105]\right)$.

Les événements $[X_1 = -10]$ et $[X_1 = 11]$ forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, il vient :

$$\mathbb{P}\left([S_T = 105]\right) = \mathbb{P}\left([X_1 = -10]\right)\mathbb{P}\left([S_T = 105] \mid [X_1 = -10]\right) + \mathbb{P}\left([X_1 = 11]\right)\mathbb{P}\left([S_T = 105] \mid [X_1 = 11]\right)$$

Sachant l'événement $[X_1 = -10]$, s'intéresser à la réalisation de l'événement $[S_T = 105]$ revient à reprendre tout le raisonnement fait précédemment avec une mise de départ égale à $100 - 10 = 90$ pour obtenir la valeur de $\mathbb{P}\left([S_T = 105] \mid [X_1 = -10]\right)$.

De même, sachant l'événement $[X_1 = 11]$, s'intéresser à la réalisation de l'événement $[S_T = 105]$ revient à reprendre tout le raisonnement fait précédemment avec une mise de départ égale à $100 + 11 = 111$ pour obtenir la valeur de $\mathbb{P}\left([S_T = 105] \mid [X_1 = 11]\right)$.

On reprend le raisonnement précédent en considérant que la mise de départ S_0 est un entier quelconque noté s, c'est à dire $S_0 = 100$.

On note alors $\mathbb{P}_s\left([S_T = 105]\right)$ la probabilité que l'on s'arrête avec un gain de 105.

Avec ces notations, on cherche bien $\mathbb{P}_s\left([S_T = 105]\right) = \mathbb{P}\left([S_T = 105]\right)$.

Si $s = 105$ **:** par principe, on veut s'arrêter, donc on ne joue pas...

Si $s > 105$ **ou** $s \leq 89$ **:** par principe, le jeu ne commence pas...

Si $90 \leq s \leq 104$ **:** par principe, le jeu peut commencer, et on a alors :

$$\mathbb{P}_s\left([S_T = 105]\right) = \underbrace{\mathbb{P}\left([X_1 = -10]\right)}_{=\frac{1}{2}}\mathbb{P}_{s-10}\left([S_T = 105]\right) + \underbrace{\mathbb{P}\left([X_1 = 11]\right)}_{=\frac{1}{2}}\mathbb{P}_{s+11}\left([S_T = 105]\right)$$

Les termes de la suite $(u_s)_{s\geq 1}$ dont le terme général est $u_s = \mathbb{P}_s([S_T = 105])$, est alors telle que :

$$\forall s \in \mathbb{N},\ u_s = \frac{u_{s-10} + u_{s+11}}{2}$$

et on cherche donc la valeur de u_{100}.

Soit alors $100 \leq s \leq 104$. On a donc : $\begin{cases} 105 < 111 \leq s+11 \leq 115 \\ 89 < 90 \leq s-10 \leq 94 \end{cases}$

On a donc : $u_s = \dfrac{u_{s-10}+0}{2}$.

Sur le même principe, exprimons u_{s-10}. D'après la relation vérifiée par les termes de la suite $(u_s)_{s\geq 1}$, on a : $u_{s-10} = \dfrac{u_{s-10-10} + u_{s-10+11}}{2}$ c'est à dire $u_{s-10} = \dfrac{u_{s-20}+u_{s+1}}{2}$

Par hypothèse sur s, on a : $\begin{cases} 101 \leq s+1 \leq 105 \\ 80 \leq s-20 \leq 84 < 89 \end{cases}$

ce qui donne que $u_{s-10} = \dfrac{u_{s+1}}{2}$

Finalement, il vient que $u_s = \dfrac{u_{s+1}}{4}$, et en raisonnant de proche en proche que $u_{100} = \dfrac{u_{105}}{4^5}$, ce qui donne $u_{100} = \dfrac{u_{105}}{1024}$.

Or par construction de la suite $(u_s)_{s\geq 1}$, on a $u_{105} = 1$, ce qui donne que $u_{100} = \dfrac{1}{1024}$ et donc que $\mathbb{P}([S_T = 105]) = \dfrac{1}{1024}$.

Partie B | Deuxième jeu

Jeu n° 2

On possède un certain montant d'argent et on tire à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur pile, on gagne 11% de notre montant et si elle tombe sur face, on perd 10% de notre montant. On recommence un certain nombre de fois avec des lancers que l'on suppose indépendants.

La différence avec le jeu précédent est que le gain ou la perte sont maintenant des pourcentages du montant.
Pour $i \geq 1$, on note Y_i la variable aléatoire égale à $1,11$ si la i^e pièce tombe sur pile et égale à $0,9$ si elle tombe sur face.

Q17. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y_i)$ pour $i \geq 1$.

Q 17| Éléments de réponse

On a clairement que $Y_i(\Omega) = \{0,9; 1,11\}$ et Y_i est à support fini, donc admet une espérance qui vaut directement par définition $\mathbb{E}(Y_i) = \dfrac{1}{2} \times 0,9 + \dfrac{1}{2} \times 1,11$ et donc $\mathbb{E}(Y_i) = 1,005$.

Q18. On note $\Pi_0 = 100$ le montant initial et Π_n le montant obtenu [2] après n lancers.
Pour $n \geq 1$, exprimer Π_n en fonction des Y_i où $i \geq 1$

Q 18| Éléments de réponse

Pour $n \geq 1$, on a donc $\Pi_n = Y_n \times \Pi_{n-1}$ et donc il vient que $¶_n = 100 \displaystyle\prod_{i=1}^{n} Y_i$.

Q19. Pour $n \geq 0$, calculer $\mathbb{E}(\Pi_n)$.

2. voir remarque précédente

Q 19| Éléments de réponse

Les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ étant indépendantes, il vient que $\mathbb{E}(\Pi_n) = 100 \times \mathbb{E}(Y_1) \times \ldots \times \mathbb{E}(Y_n)$ ce qui donne que $\mathbb{E}(\Pi_n) = 100\,(1,005)^n$.

Q20. Soit $i \geq 1$. On note $\alpha = -\mathbb{E}(\ln(Y_i))$. Montrer que $\alpha > 0$.

Q 20| Éléments de réponse

Les calculs précédents donnent que $\alpha = -\dfrac{\ln(1,11) + \ln(0,9)}{2}$ et donc que $\alpha = -\dfrac{\ln(0,999)}{2} > 0$ car $\ln(0,999) < 0$.

Q21. Montrer que $\mathbb{P}\left(\left[\Pi_n \leq 100\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}n}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q 21| Éléments de réponse

On note $T_n = \ln\left(\dfrac{\Pi_n}{100}\right)$, c'est à dire $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
On a alors directement que $\mathbb{E}(T_n) = -n\alpha$ et $\mathbb{V}(T_n) = n \times \mathbb{V}(\ln(Y_i))$ par indépendance de $Y_1, \ldots, Y_n$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\left[T_n > -\frac{\alpha}{2}n\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[T_n - (-n\alpha) > \frac{\alpha}{2}n\right]\right) \leq \mathbb{P}\left(\left[|T_n - \mathbb{E}(T_n)| > \frac{\alpha}{2}n\right]\right) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{\left(\frac{\alpha}{2}n\right)^2} = \frac{d}{n}$$

où d est une constante non nulle. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\mathbb{P}\left(\left[T_n > -\dfrac{\alpha}{2}n\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit alors que $\mathbb{P}\left(\left[\Pi_n \leq 100\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}n}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[T_n \leq -\dfrac{\alpha}{2}\right)\right] , \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q22. En quoi ce second jeu peut-il paraître paradoxal ?

Q 22| Éléments de réponse

$\mathbb{E}(\Pi_n) = 100(1,005)^n$ représente le gain moyen réalisé et ce dernier tend vers $+\infty$ puisque $1,005 > 1$. Cependant plus n est grand, plus $100\mathrm{e}^{-\dfrac{\alpha}{2}n}$ est petit ce qui signifie que dans $\mathbb{P}\left(\left[\Pi_n \leq 100\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}n}\right]\right)$ le gain obtenu est de plus en plus petit et que la probabilité correspondante tend vers 1. Ainsi le gain moyen tend vers $+\infty$ mais le gain tend vers 0.

Q23. Si vous aviez le choix, préfériez-vous jouer au premier jeu ou au second ? Justifier brièvement votre réponse.

Q 23| Éléments de réponse

Pour n grand, le premier jeu semble plus avantageux puisqu'en reprenant l'interprêtation précédente, on aurait le gain S_n qui grandit alors que ce n'est pas le cas pour le deuxième jeu.
Cependant, si l'on joue plusieurs parties, avec n grand, en terme d'espérance, c'est le deuxième jeu qui devient plus avantageux car le gain moyen du deuxième jeu dépasse celui du premier jeu dès lors que n est assez grand.

Problème n° 3 | Comparaison de protocoles de tests

On chercher à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple « être malade » ou « être donneur compatible »).

On fixe $q \in]0;1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de ne pas posséder la propriété recherchée.

Le résultat d'une analyse est dit **positif** si la propriété est présente, **négatif** si elle ne l'est pas.

L'objet de ce problème consiste en la comparaison de différents protocoles de tests.

On rappelle que la probabilité conditionnelle de l'événément A sachant l'événement B est noté $\mathbb{P}(A \mid B)$, et on pourra admettre le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{i=1}^{n} ix^{i-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}$$

Partie A | Recherche de toutes les personnes possédant la propriété

On veut trouver toutes les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geq 2$.

Protocole A

On mélange le sang des n personnes et l'on fait une analyse de ce mélange. Si le résultat est négatif on s'arrête. S'il est positif, on analyse individuellement le sang de chacune des n personnes.

On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole A pour n personnes.

Q24. Pourquoi s'arrête-t-on si le premier résultat est négatif ?

Q 24| Éléments de réponse

Si le premier résultat est négatif, aucune des personnes ne possède ainsi la propriété cherchée, donc elles sont toutes négatives au regard de cette propriété, et le protocole A prévoit que l'on arrête le test à cet instant là.

Q25. Quelles valeurs peut prendre A_n ?

Q 25| Éléments de réponse

Soit on est amené à se limiter au premier test « de groupe », soit on doit en plus tester les n personnes.
Ainsi, $A_n(\Omega) = \{1, n+1\}$.

Q26. Déterminer la loi de A_n.

Q 26| Éléments de réponse

On désigne pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ par I_k l'événement « le k-e individu possède la propriété ».
Il est clair que $[A_n = 1] = \overline{I_1} \cap \overline{I_2} \cap \ldots \cap \overline{I_n}$.
Par hypothèse, ces événements sont indépendants, et il vient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([A_n = 1]) &= \mathbb{P}\left(\overline{I_1} \cap \overline{I_2} \cap \ldots \cap \overline{I_n}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([\overline{I_k}]) \\ &= q^n \end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([A_n = n+1]) &= 1 - \mathbb{P}([A_n = 1]) \\ &= 1 - q^n \end{aligned}$$

ce qui donne la loi de A_n.

Q27. Montrer que l'espérance de A_n est $\mathbb{E}(A_n) = n + 1 - nq^n$.

Q 27| Éléments de réponse

A_n étant à support fini, elle admet une espérance, et par définition, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_n) &= 1 \times \mathbb{P}([A_n + 1]) + (n+1)\mathbb{P}([A_n = n+1]) \\ &= 1 + n - nq^n \end{aligned}$$

Q28. On considère un entier k tel que $1 \leq k < n$. Calculer la probabilité conditionnelle que les k premières personnes testées soient toutes négatives, sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.

Q 28| Éléments de réponse

On cherche donc $\mathbb{P}\left(\overline{I_1} \cap \ldots \cap \overline{I_k} \mid [A_n = n+1]\right)$.
Puisque $[A_n = 1]$ et $[A_n = n+1]$ forment un système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\left([A_n = n+1] \cap \overline{I_1} \cap \ldots \cap \overline{I_k}\right) + \mathbb{P}\left([A_n = 1] \cap \overline{I_1} \cap \ldots \cap \overline{I_k}\right) = \mathbb{P}\left(\left[\overline{I_1} \cap \ldots \cap \overline{I_k}\right]\right)$$

et donc :

$$\underbrace{\mathbb{P}\left([A_n = n+1]\right)}_{=1-q^n} \mathbb{P}\left(\overline{I_1} \cap \ldots \cap \overline{I_k} \mid [A_n = n+1]\right) + \underbrace{\mathbb{P}\left([A_n = 1]\right)}_{=q^n} \underbrace{\mathbb{P}\left(\overline{I_1} \cap \ldots \cap \overline{I_k} \mid [A_n = 1]\right)}_{=1} = \underbrace{\mathbb{P}\left(\left[\overline{I_1} \cap \ldots \cap \overline{I_k}\right]\right)}_{=q^k \text{ par indépendance}}$$

ce qui amène à : $\quad \mathbb{P}\left(\overline{I_1} \cap \ldots \cap \overline{I_k} \mid [A_n = n+1]\right) = \dfrac{q^k - q^n}{1 - q^n}$

Protocole B

On fait un test pour chacune des personnes.

Q29. À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole A qu'avec le protocole B ? On exprimera le résultat en fonction de n.

Q 29| Éléments de réponse

Le protocole B induit la nécessitde faire n tests, et si on note B_n la variable aléatoire égale au nombre de tests réalisés, B_n est la variable aléatoire constante égale à n, donc est d'espérance égale à n.
On cherche donc n tel que $\mathbb{E}(A_n) \leq \mathbb{E}(B_n)$, ce qui revient à résoudre l'inéquation $n + 1 - nq^n \leq n$ ou encore $nq^n \geq 1$.
On a alors : $\quad (\mathbb{E}(A_n) \leq \mathbb{E}(B_n)) \quad \Leftrightarrow \quad \left(q \geq \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$.

Q30. Déterminer la limite à droite en 0 de la fonction $x \longmapsto x^x$.

Q 30| Éléments de réponse

Par définition, on a : $\quad x^x = \mathrm{e}^{x \ln(x)}$
Par croissances comparées, on sait que $x\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure par composition que $x^x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.

Q31. Justifier que, pour n assez grand, le protocole B est préférable au protocole A.

Q 31| Éléments de réponse

On sait que $\dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure que $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
Aussi pour n assez grand, il viendrait que $\mathbb{E}(A_n) \leq \mathbb{E}(B_n)$ pour $q \geq 1$ ce qui n'est pas possible puisque $q \in]0;1[$.
Donc pour n assez grand, le protocole B est préférable au protocole A.

Partie B | Recherche d'une personne possédant la propriété

On veut dorénavant trouver une personne possédant la propriété recherchée, au sein d'une population que l'on suppose infinie.

Protocole C

On teste toutes les personnes une par une, jusqu'à en trouver une qui possède la propriété.

On note C la variable aléatoire qui indique le rang de la première personne possédant la propriété, c'est à dire que $C = j$ si la j^{e} personne est la première à posséder la propriété. Ainsi, C compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant le protocole C.

On rappelle que q est la probabilité de ne pas posséder la propriété recherchée et on note $p = 1 - q$ la probabilité de la posséder.

Q32. Donner la loi de C.

Q 32| Éléments de réponse

C suit clairement une loi géométrique puisqu'elle modélise dans le protocole C le rang d'apparition du premier succès dans une répétition indépendante de la même lexpérience de Bernoulli qui consiste en regarder si la personne possède ou non la propriété.
Ainsi C suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Q33. Donner, sans justification, l'espérance de C.

Q 33| Éléments de réponse

Dans ce cas, on sait que C admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}(C) = \dfrac{1}{1-q}$.

On va maintenant procéder par regroupement. On fixe un entier $n \geq 2$, qui désignera la taille des groupes. Ainsi, le premier groupe contiendra les n premières personnes, le second groupe contiendra les n suivantes, et ainsi de suite.

Protocole D

On mélange le sang des n personnes du premier groupe et on le teste. Si le résultat est négatif, on procède de façon similaire avec le groupe suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un test positif. On teste ensuite une par une les personnes du groupe dont le test est positif, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété.

On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc.

Soit k un entier strictement positif.

Q34. Exprimer l'événement $[G > k]$ en fonction de la variable aléatoire C.

Q 34| Éléments de réponse

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$[G > k]$ est l'événement « les k premiers groupes sont constitués d'individus qui ne possèdent pas la propriété ».
Ainsi, les $n \times k$ personnes constituant ces k premiers groupes ne possèdent pas la propriété, et donc la première personne qui sera positive sera au mieux la première personne du groupe $k + 1$, ce qui correspond à l'événement $[C > nk]$.

Q35. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([G > k])$.

Q 35| Éléments de réponse

D'après la question précédente $\mathbb{P}([G > k]) = \mathbb{P}([C > k])$.
On a alors :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([G > k]) &= 1 - \mathbb{P}([C \leq nk]) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{nk} pq^{j-1} \\ &= 1 - p \sum_{i=0}^{nk-1} q^i \\ &= 1 - p \times \frac{1 - q^{nk}}{1-q} \\ &= 1 - \left(1 - q^{nk}\right) \\ &= q^{nk}\end{aligned}$$

Q36. Reconnaître la loi de G.

Q 36| Éléments de réponse

Tout d'abord $G(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On sait que : $\mathbb{P}([G = k]) = \mathbb{P}([G > k-1]) - \mathbb{P}([G > k])$
On en déduit alors que : $\mathbb{P}([G = k]) = (1 - q^n)\, q^{n(k-1)}$
ce qui assure que G suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^n$.

On note X la variable aléatoire représentant le numéro de la première personne à avoir un test positif au sein de son groupe. Par exemple, si c'est la cinquième personne du second groupe qui donne le premier test positif, cela signifie que $G = 2$ et $X = 5$.

Q37. Quelles valeurs peut prendre X ?

Q 37| Éléments de réponse

Il est immédiat que $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$ puisque cela correspond au numéro de l'individu dans son groupe.

Q38. Pour $k \geq 1$ et $i \in [\![1; n]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}([X = i] \mid [G = k])$, c'est à dire la probabilité que l'événement $[X = i]$ est réalisé sans que l'événement $[G = k]$ est réalisé.

Q 38| Éléments de réponse

Par définition :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = i] \mid [G = k]) &= \frac{\mathbb{P}([X = i] \cap [G = k])}{\mathbb{P}([G = k])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([C = n(k-1) + i])}{\mathbb{P}([G = k])} \\ &= \frac{(1-q) \times q^{n(k-1)+i-1}}{(q^n)^{k-1}(1 - q^n)} \\ &= \frac{(1-q)\, q^{i-1}}{1 - q^n}\end{aligned}$$

Q39. Calculer la limite de cette quantité lorsque q tend vers 1.

Q 39| Éléments de réponse

On sait que : $\forall q \neq 1, \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \frac{1 - q^n}{1 - q}$
et que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} 1^j = n$.
On en déduit donc que $\dfrac{1 - q^n}{1 - q} \underset{q \to 1}{\longrightarrow} n$ et par passage à l'inverse, il vient que $\mathbb{P}([X = i] \mid [G = k]) \underset{q \to 1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n}$.

Q40. Montrer que X et G sont indépendantes.

Q 40| Éléments de réponse

Montrons que pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times G(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}([X = i]) = \mathbb{P}([X = i] \mid [G = k])$.
On aura alors dans ce cas que : $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times G(\Omega), \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([G = k]) = \mathbb{P}([G = k] \cap [X = i])$
ce qui assurera l'indépendance de X et G.
Soit $i \in X(\Omega)$. Les événements $([G = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ forment un système complet d'événements, ce qui assure alors que d'après

la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=i]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([G=k])\,\mathbb{P}([X=i] \mid [G=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-q)\,q^{i-1}}{1-q^n} \times \mathbb{P}([G=k]) \\
&= \frac{(1-q)\,q^{i-1}}{1-q^n} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([G=k])}_{=1} \\
&= \frac{(1-q)\,q^{i-1}}{1-q^n} \\
&= \mathbb{P}([X=i] \mid [G=k])
\end{aligned}$$

Q41. Montrer que : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-(n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)(1-q^n)}$.

Q 41| Éléments de réponse

X étant à support fini, elle admet une espérance, qui par définition est :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}([X=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{(1-q)\,q^{i-1}}{1-q^n} \\
&= \frac{1-q}{1-q^n} \sum_{i=1}^{n} iq^{i-1} \\
&= \frac{1-q}{1-q^n} \times \frac{1+nq^{n+1}-(n+1)q^n}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1+nq^{n+1}-(n+1)q^n}{(1-q)(1-q^n)}
\end{aligned}$$

Q42. On note D le nombre de tests effectués avec le protocole D.
Exprimer en fonction des valeurs prises par G et par X, l'événement $[D=3]$.

Q 42| Éléments de réponse

$[D=3]$ signifie que 3 tests ont été effectués et correspondent à :

- $[G=1] \cap [X=2]$: le premier groupe est testé positif et la 2^{e} personne de ce groupe l'est sans que la première le soit ;
- $[G=2] \cap [X=1]$: le 2^{e} groupe est testé positif et la 1^{e} personne de ce groupe aussi ;

et finalement, il vient que : $[D=3] = ([G=1] \cap [X=2]) \cup ([G=2] \cap [X=1])$.

Q43. Trouver une relation entre D, G et X.

Q 43| Éléments de réponse

Il est immédiat que $D = G + X$.

Q44. Soit un entier $j \geq 1$. Montrer que : $\mathbb{P}([D=j]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}([C=(k-1)n+j-k])$.

Q 44| Éléments de réponse

Puisque $D = G + X$, il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([D=j]) &= \sum_{i+k=j} \mathbb{P}([G=k]\cap[X=i]) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}([G=k]\cap[X=j-k]) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}([C=n(k-1)+j-k])\end{aligned}$$

Q45. Calculer $\mathbb{E}(D)$.

Q 45| Éléments de réponse

Par linéarité de l'espérance et que toutes les espérances mises en jeu existent, il vient que $\mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(G) + \mathbb{E}(X)$.
D'après les questions précédentes, on a donc : $\mathbb{E}(D) = \dfrac{1}{1-q^n} + \dfrac{1+nq^{n+1}-(n+1)q^n}{(1-q)(1-q^n)}$.

Q46. À n fixé, calculer la limite du quotient $\dfrac{\mathbb{E}(D)}{\mathbb{E}(C)}$ lorsque q tend vers 1. Interpréter ce résultat.

Q 46| Éléments de réponse

On sait que $\mathbb{E}(C) = \dfrac{1}{1-q}$ donc on en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(D)}{\mathbb{E}(C)} &= \frac{1-q}{1-q^n} + \frac{1+nq^{n+1}-(n+1)q^n}{1-q^n} \\ &= \frac{1-q}{1-q^n} + \frac{1+nq^{n+1}-nq^n-q^n}{1-q^n} \\ &= \frac{1-q}{1-q^n} + 1 + \frac{nq^n(q-1)}{1-q^n} \\ &= \underbrace{\frac{1-q}{1-q^n}}_{\underset{q\to1}{\longrightarrow}\frac{1}{n}} + 1 - n\underbrace{q^n}_{\underset{q\to1}{\longrightarrow}1} \times \underbrace{\frac{1-q}{1-q^n}}_{\underset{q\to1}{\longrightarrow}\frac{1}{n}} \\ &\underset{q\to1}{\longrightarrow} \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Lorsque q tend vers 1 cela signifie que la probabilité qu'un individu ait la propriété cherchée est très faible. Détecter un individu possédant la propriété en utilisant avec le protocole D est donc en moyenne $\dfrac{1}{n}$ fois moins important qu'avec le protocole D.