À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Études de séries numériques construites à partir de la suite de Fibonacci

Dans toute problème, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dite suite de Fibonacci, définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_0 & = & 0 \\ f_1 & = & 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ f_{n+2} & = & f_{n+1}+f_n \end{array}\right.$$

Partie A | Explicitation du terme général de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q1. Résoudre l'équation $r^2=r+1$ d'inconnue le réel r.

Éléments de correction

Il est clair que : $\quad (r^2=r+1) \quad \Leftrightarrow \quad (r^2-r-1=0)$

L'équation $r^2-r-1=0$ est clairement une équation de degré 2 en r dont le discriminant vaut $\sqrt{5}$, et par suite dont les solutions sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $r^2=r+1$ est $\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Q2. Démontrer que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Éléments de correction

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique $r^2=r+1$ admet deux solutions réelles trouvées à la question précdente.

Ainsi, il exite $(a,a)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ f_n=a\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+b\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Les deux conditions $f_0=0$ et $f_1=0$ amènent alors que (a,b) satisfait aux conditions $\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}b=1 \end{array}\right.$

On résout alors ce système par échelonnement en lignes à l'aide de sa représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow L_2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} & 1 \end{array}\right) \underset{L_1\leftarrow L_1+\frac{1}{\sqrt{5}}L_2}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\sqrt{5} & 1 \end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow \frac{1}{\sqrt{5}}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right)$$

et on en déduit alors que $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $b = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ pour obtenir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Q3. Déterminer alors la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

Puisque $1 < \sqrt{5}$, il vient que $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \geq 1$ donc par théorème, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

De même, puisque $2 < \sqrt{5} < 3$, il vient que $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ donc par théorème, $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, par somme $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ et par conséquent, $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Q4. Démontrer que $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \omega$ où l'on a posé $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Éléments de correction

Pour simplifier, on pose $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\omega} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

D'après ce qui précède, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^{n+1} - \overline{\omega}^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^{n} - \overline{\omega}^{n}\right)} = \frac{\omega^{n+1} - \overline{\omega}^{n+1}}{\omega^{n} - \overline{\omega}^{n}} = \frac{\omega^n\left(\omega - \frac{\overline{\omega}^{n+1}}{\omega^n}\right)}{\omega^n\left(1 - \frac{\overline{\omega}^{n}}{\omega^n}\right)} = \frac{\omega - \overline{\omega}\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^n}{1 - \left(\frac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^n}$$

Comme on a clairement que $\left|\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}\right| < 1$, il vient que $\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ et par conséquent que $1 - \left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\omega - \overline{\omega}\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \omega$ et donc par quotient que $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \omega$.

Partie B | Étude d'une première série télescopique

Dans tout cette partie, on s'intéresse à la série numérique $\sum \dfrac{f_{n-1}}{f_n f_{n+1}}$.

On désigne alors par $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, c'est à dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f_{k-1}}{f_k f_{k+1}}$

Q5. Exprimer S_n en fonction de f_1 et de f_{n+1}.

Éléments de correction

Compte-tenu de la relation définissant les termes de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on commence par remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$

Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n$
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{k+1}-f_k}{f_k f_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_{k+1}}{f_k f_{k+1}} - \frac{f_k}{f_k f_{k+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{f_k} - \frac{1}{f_{k+1}}\right) \\ &= \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_{n+1}} \end{aligned}$$

Q6. Déduire de ce qui précède la convergence et la somme de la série $\sum \frac{f_{n-1}}{f_n f_{n+1}}$.

Éléments de correction

D'après ce qui précède, on sait que $f_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et par suite $\frac{1}{f_{n+1}} dlimhn, +\infty 0$.

On en déduit donc par somme que $\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{f_1}$ et par conséquent la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\frac{1}{f_1} = 1$.

Finalement, la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{f_{n-1}}{f_n f_{n+1}}$ étant convergente, par définition, la série $\sum \frac{f_{n-1}}{f_n f_{n+1}}$ est convergente, et a pour somme 1, c'est à dire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_{n-1}}{f_n f_{n+1}} = 1$.

Partie C | Étude d'une deuxième série téléscopique

Dans tout cette partie, on s'intéresse à la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{f_n f_{n+1}}$.

On désigne alors par $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série, c'est à dire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{f_k f_{k+1}}$

Q7. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (f_{n+1})^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$.

Éléments de correction

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $(f_{n+1})^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a $f_2 = f_1 + f_0$ et donc $f_2 = 1$.

Par suite :
$$\begin{aligned} (f_{0+1})^2 - f_0 f_{0+2} &= (f_1)^2 - f_0 f_2 \\ &= 1^1 - 0 \times 1 \\ &= 1 \\ &= (-1)^0 \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $(f_{n+1})^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

En utilisant la relation définissant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl}
(f_{n+2})^2 - f_{n+1}f_{n+3} & = & (f_{n+2})^2 - (f_{n+2} - f_n)(f_{n+2} + f_{n+1}) \\
 & = & (f_{n+2})^2 - \left((f_{n+2})^2 + f_{n+2}f_{n+1} - f_nf_{n+2} - f_nf_{n+1}\right) \\
 & = & -f_{n+2}f_{n+1} + f_nf_{n+2} + f_nf_{n+1} \\
 & = & -\left((f_{n+1}(f_{n+2} - f_n) - f_nf_{n+2})\right) \\
 & = & -(f_{n+1})^2 - f_nf_{n+2} \\
 & \underset{\text{H.R.}}{=} & -1 \times (-1)^n \\
 & = & (-1)^{n+1}
\end{array}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q8. Exprimer T_n en fonction de f_1, f_2, f_{n+1} et f_{n+2}.

Éléments de correction

D'après la question précédente, il vient directement que :

$$\begin{array}{rcl}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{f_kf_{k+1}} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(f_{k+1})^2 - f_kf_{k+2}}{f_kf_{k+1}} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(f_{k+1})^2}{f_kf_{k+1}} - \frac{f_kf_{k+2}}{f_kf_{k+1}}\right) \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f_{k+1}}{f_k} - \frac{f_{k+2}}{f_k}\right) \\
 & = & \displaystyle\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_{n+1}}{f_n}
\end{array}$$

Q9. Déduire de ce qui précède la convergence et la somme de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{f_nf_{n+1}}$.

Éléments de correction

D'après les questions précdentes, on sait que $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \omega$ donc par somme $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\omega$.
et par conséquent la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $1-\omega$.
Finalement, la suite des sommes partielles de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{f_nf_{n+1}}$ étant convergente, par définition, la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{f_nf_{n+1}}$ est convergente, et a pour somme $1-\omega$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{f_nf_{n+1}} = 1-\omega$.

Partie D | Étude d'une troisième série

Dans toute cette partie, on s'intéresse à la série numérique $\sum f_nx^n$ où x est un réel strictement positif quelconque.
On pourra admettre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs à partir du rang 1.

Q10. Montrer que la série $\sum f_nx^n$ est convergente si, et seulement si $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Pour les questions qui suivent, pour $\neq 0$ tel que $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, on désignera alors par $\Phi(x)$ la somme de la série $\sum f_nx^n$.

Éléments de correction

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = f_n x^n$.
Il est immédiat que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.

Il vient alors que : $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f_{n+1}x^{n+1}}{f_n x^n} = \frac{f_{n+1}}{f_n}\times x$$

D'après ce qui précde, on sait que $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \omega$.

Il vient ainsi que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \omega x$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, on en déduit que :

- **Si** $\omega x < 1$ **:** la série numérique $\sum u_n$ est convergente
- **Si** $\omega x > 1$ **:** la série numérique $\sum u_n$ est divergente, et même grossièrement divergente

Or il est clair que : $(\omega x < 1) \Leftrightarrow \left(x < \dfrac{1}{\omega}\right)$.

Comme on a : $$\frac{1}{\omega} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-5} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

ce qui assure que la série $\sum f_n x^n$ est convergente si, et seulement si $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Q11. Soit $x\neq 0$ tel que $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Démontrer que : $\Phi(x) = x + x\Phi(x) + x^2\Phi(x)$.

Éléments de correction

Par définition : $$\Phi(x) = f_0x^0 + f_1x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} f_n x^n$$

c'est à dire que : $$\Phi(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} f_n x^n.$$

On a alors : $$\begin{aligned}\forall n\geq 2,\ \sum_{k=2}^{n} f_k x^k &= \sum_{j=0}^{n-2} f_{j+2}x^{j+2}\\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \left(f_{j+1}+f_j\right)x^{j+2}\\ &= \sum_{j=0}^{n-2} f_{j+1}x^{j+2} + \sum_{j=0}^{n-2} f_j x^{j+2}\\ &= x\sum_{j=0}^{n-2} f_{j+1}x^{j+1} + x^2\sum_{j=0}^{n-2} f_j x^j\\ &= x\sum_{k=1}^{n-1} f_k x^k + x^2\sum_{k=0}^{n-2} f_k x^k\\ &= x\sum_{k=0}^{n-1} f_k x^k + x^2\sum_{k=0}^{n-2} f_k x^k\end{aligned}$$

Comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_k x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(x)$ et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} f_k x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(x)$, on en déduit par passage à la limite que

$\Phi(x) = x + x\Phi(x) + x^2\Phi(x)$.

Q12. En déduire alors que pour $x \neq 0$ tel que $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Éléments de correction

De la relation $\Phi(x) = x + x\Phi(x) + x^2\Phi(x)$, il vient directement que $\Phi(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ et donc que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Problème n° 2 | Études d'endomorphismes nilpotents

On rappelle que l'on désigne par $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, et on note $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.

Partie A | Étude d'un premier endomorphisme

On désigne par f l'application définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y+z, -2x+y-z, -6x+3y-3z) \end{array} \right.$

Q13. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

Soient $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u = (x_1, y_1, z_1) & \in & \mathbb{R}^3 \\ v = (x_2, y_2, z_2) & \in & \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$ et on pose $w = (x_3, y_3, z_3)$ où par construction $\left\{ \begin{array}{rcl} x_3 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ y_3 & = & \lambda y_1 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda z_1 + z_2 \end{array} \right.$.
Montrons que $f(w) = \lambda f(u) + f(v)$.
Par définition de f, il vient :

$$\begin{array}{rcl} f(w) & = & (2x_3 - y_3 + z_3, -2x_3 + y_3 - z_3, -6x_3 + 3y_3 - 3z_3) \\ & = & \big(2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) + \lambda z_1 + z_2, \\ & & \quad -2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2), \\ & & \quad\quad -6(\lambda x_1 + x_2) + 3(\lambda y_1 + y_2) - 3(\lambda z_1 + z_2)\big) \\ & = & \big(2\lambda x_1 - \lambda y_1 + \lambda z_1 + 2x_2 - y_2 + z_2, \\ & & \quad -2\lambda x_1 + \lambda y_1 - \lambda z_1, -2x_2 + y_2 - z_2, \\ & & \quad\quad -6\lambda x_1 + 3\lambda y_1 - 3\lambda z_1 - 6x_2 + 3y_2 - 3z_2\big) \\ & = & (2\lambda x_1 - \lambda y_1 + \lambda z_1, -2\lambda x_1 + \lambda y_1 - \lambda z_1, -6\lambda x_1 + 3\lambda y_1 - 3\lambda z_1) \\ & & \quad + \underbrace{(2x_2 - y_2 + z_2, -2x_2 + y_2 - z_2, -6x_2 + 3y_2 - 3z_2)}_{=f(v)} \\ & = & \lambda \underbrace{(2x_1 - y_1 + z_1, -2x_1 + y_1 - z_1, -6x_1 + 3y_1 - 3z_1)}_{=f(u)} + f(v) \\ & = & \lambda f(u) + f(v) \end{array}$$

ce qui assure le caractère linéaire de f, et comme l'image de $\mathbb{R}^3$ par f est inclus dans $\mathbb{R}^3$, f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q14. Déterminer alors la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que : $\left\{\begin{array}{lcl} f(e_1) & = & (2\times 1 - 0 + 0, -2\times 1 + 0 - 0, -6\times 1 + 3\times 0 - 3\times 0) \\ & = & (2-2,-6) \\ f(e_2) & = & (2\times 0 - 1 + 0, -2\times 0 + 1 - 0, -6\times 0 + 3\times 1 - 3\times 0) \\ & = & (-1,1,3) \\ f(e_3) & = & (2\times 0 - 0 + 1, -2\times 0 + 0 - 1, -6\times 0 + 3\times 0 - 3\times 1) \\ & = & (1,-1,-3) \end{array}\right.$

ce qui donne que la matrice A de f dans $\mathcal{B}_3$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Q15. Déterminer une base de l'image de f.

Éléments de correction

Par théorème, on sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.
Or $f(e_1) = 2f(e_3)$ et $f(e_2) = -f(e_3)$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_3))$.
Par suite, $\mathrm{Im}(f)$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $f(e_3)$.

Q16. En déduire une base du noyau de f.

Éléments de correction

De la question précédente, on en déduit que $\mathrm{rg}(f) = 1$.
Le théorème du rang appliqué à f donne que : $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\mathrm{rg}(f)}_{=1} + \dim(\mathrm{Ker}(f))$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
Par contemplation de la matrice A, on remarque que $f(e_1) = 2f(e_3)$, donc par linéarité le vecteur $e_1 - 2e_3$ est d'image nulle par f, c'est à dire que $e_1 - 2e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$.
De même, puisque $f(e_2) = -f(e_3)$, il vient que $e_2 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$.
La famille $(e_1 - 2e_3, e_2 - e_3)$ est donc une famille de deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$. Ces deux vecteurs étant non nuls et non colinéaires, ils forment un famille libre. Comme il s'agit d'une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ qui est un espace de dimension 2, on en déduit que cette dernière est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Q17. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Éléments de correction

D'après le théorème caractéristique des automorphismes : $(f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3) \Leftrightarrow (\mathrm{rg}(f) = 3)$.
Or on a vu que $\mathrm{rg}(f) = 1$, donc f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q18. Démontrer que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Éléments de correction

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha f(e_3)$.
Par suite, on a par linéarité de f que $f(y) = \alpha f(f(e_3))$
Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{array}{lcl} f(f(e_3)) & = & f(1,-1,3) \\ & = & (2\times 1 - (-1) + (-3), -2\times 1 + (-1) - (-3), -6\times 1 + 3\times(-1) - 3\times(-3)) \\ & = & (0,0,0) \\ & = & \overrightarrow{0} \end{array}$$

Ainsi, on a $f(y) = \overrightarrow{0}$ et donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
Ce raisonnement étant vrai pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Q19. On rappelle que l'on note $f^2 = f \circ f$. Démontrer que f^2 est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

Soit alors $u \in \mathbb{R}^3$. Il vient que $f(u) \in \mathrm{Im}\,(f)$, et d'après la question précédente que $f(u) \in \mathrm{Ker}\,(f)$ c'est à dire que $f\,(f(u)) = \overrightarrow{0}$ ce qui revient à dire que $f^2\,(u) = \overrightarrow{0}$.
Ainsi, puisque pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $f^2\,(u) = \overrightarrow{0}$, on en déduit que f^2 est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

Q20. Dans toute la fin de cette partie, on désigne par u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\,(f)$, et on désigne par v le vecteur de $\mathbb{R}^3$ donné par $v = f(u)$.

Démontrer que l'on peut choisir un autre vecteur w de $\mathrm{Ker}\,(f)$ non colinéaire à v et tel que la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

Par construction $v \in \mathrm{Im}\,(f)$ avec $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, donc $v \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
Puisque $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(g)) = 2$, par le théorème de la base incomplète appliqué à la famille libre de $\mathrm{Ker}\,(f)$ réduite au seul vecteur v, il existe donc $w \in \mathrm{Ker}\,(f)$ tel que (v, w) est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$, avec w non nul et non colinéaire à v sinon la famille serait liée.
Étudions alors la liberté de la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$.
Supposons donc avoir $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $(\star)$ $au + bv + cw = \overrightarrow{0}$.
Par linéarité de f, en composant $(\star)$ par f, il vient que $af(u) + bf(v) + cf(w) = \overrightarrow{0}$.
Or $v = f(u)$ donc $f(v) = f^2(u)$ et on sait que f^2 est l'endomorphisme nul, donc $f^2(u) = 0$.
De même, puisque w est dans $\mathrm{Ker}\,(f)$ par construction, il vient que $f(w) = \overrightarrow{0}$.
Ainsi, on obtient que $af(u) = \overrightarrow{0}$. Or par hypothèse $f(u)$ n'est pas dans le noyau, donc $f(u) \neq 0$ et ainsi $a = 0$.
$(\star)$ devient alors $bv + cw = \overrightarrow{0}$.
En composant de nouveau par f, il vient que $bf(v) + cf(w) = \overrightarrow{0}$.
Par construction, la famille (v, w) est une famille libre (car base) donc il vient que $b = 0$ et $c = 0$ puisque l'on dispose d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille libre.
Ainsi, on a bien $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$.
La famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est donc une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc par théorème, elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Q21. Déterminer alors la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

Éléments de correction

Par définition des vecteurs de $\mathcal{C}$, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} f(u) & = & v0 \times u + 1 \times v + 0 \times w \\ f(v) & = & \overrightarrow{0} \\ & = & 0 \times u + 0 \times v + 0 \times w \\ f(w) & = & \overrightarrow{0} \\ & = & 0 \times u + 0 \times v + 0 \times w \end{array}\right.$

et par conséquent, la matrice A' de f dans $\mathcal{C}$ est la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie B | Étude d'un deuxième endomorphisme

Dans cette partie, on désigne par g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice B dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On rappelle que l'on note $g^2 = g \circ g$ et $g^3 = g \circ g \circ g$.

Q22. Déterminer les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ des endomorphismes g^2 et g^3.

Éléments de correction

Les matrices de g^2 et g^3 dans la base canonique de $\mathcal{R}^3$ sont les matrices B^2 et B^3, ce qui donne après calcul :

$$B^2 \begin{pmatrix} -3 & -3 & -9 \\ -3 & -3 & -9 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q23. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,\left(g^2\right)$.

Éléments de correction

Soit $u \in \mathrm{Ker}\,(g)$. Montrons que $u \in \mathrm{Ker}\,\left(g^2\right)$, c'est à dire que $g^2(u) = \overrightarrow{0}$.
Par hypothèse sur u, on a $g(u) = \overrightarrow{0}$, et donc par linéarité de g, on a $g\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$ ce qui donne que $g^2\,(u) = \overrightarrow{0}$.
Ainsi, on a bien $\mathrm{Ker}\,(g) \subset \mathrm{Ker}\,\left(g^2\right)$.

Q24. Déterminer une base du noyau de g et de g^2.

Éléments de correction

Recherche de $\mathrm{Ker}\,(g)$: puisque B est la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$(u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,(g)) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x,y,z) \text{ est solution du système} \\ \text{de représentation matricielle } (B|0) \end{array} \right)$$

On résout par échelonnement en lignes le système de représentation matricielle $(B|0)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{4}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{4}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{2}{3}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit ainsi que : $$(u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,(g)) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{2} \\ y & = & -\frac{3}{2} \\ z & = & \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \quad (u \in \mathrm{Vect}\,((3,3,-2)))$$

et par suite $\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Vect}\,((3,3,-2))$.

Recherche de $\mathrm{Ker}\,\left(g^2\right)$: on procède de même en utilisant la matrice B^2 pour obtenir une base de $\mathrm{Ker}\,\left(g^2\right)$ et on obtient alors que $\mathrm{Ker}\,\left(g^2\right) = \mathrm{Vect}\,((1,-1,0)\,,(3,0,1))$. Ces deux vecteurs étant clairement non nuls et non colinéaires, ils forment donc une famille libre de $ker\,\left(g^2\right)$, et donc une base car aussi génératrice par construction.

Q25. Déduire de ce qui précède une base de $\mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,\left(g^2\right)$.

Éléments de correction

D'après le théorème du rang appliqué à g, il vient que : $\underbrace{\dim\left(\mathbb{R}^3\right)}_{=3} = \underbrace{\dim\left(\mathrm{Ker}\,(g)\right)}_{=1} + \mathrm{rg}\,(f)$.

Il vient donc que $\mathrm{rg}\,(f) = 2$.
Les deux vecteurs $g\,(e_1)$ et $g\,(e_2)$ étant non nuls et non colinéaires, ils forment ainsi une famille libre de 2 vecteurs de

$\mathrm{Im}\,(f)$ qui est de dimension 2. Ils en forment dont une base et ainsi $\mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Vect}\,(g\,(e_1)\,, g\,(e_2))$.
Sur le même principe, puisque $\mathrm{rg}\,\left(g^2\right) = 1$, il vient que $\mathrm{Im}\,\left(g^2\right) = \mathrm{Vect}\,\left(g^2\,(e_1)\right)$ puisque $g^2\,(e_1) \neq \overrightarrow{0}$.

Q26. Dans toute la fin de cette partie, on désigne par u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\,\left(g^2\right)$, et on note v et w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par $v = g(u)$ et $w = g(v)$.

Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

Étudions la liberté de la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$.
Supposons alors que l'on ait $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $(\star)\ au + bv + cw = \overrightarrow{0}$.
Par linéarité de g et en composant $(\star)$ par g, il vient que : $ag(u) + bg(v) + cg(w) = \overrightarrow{0}$
ce qui par définition de v et w donne : $ag(u) + bg^2(u) + c\,\underbrace{g^3(u)}_{=\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$

Ainsi, on a : $ag(u) + bg^2(u) = \overrightarrow{0}$.
En appliquant de nouveau g, il vient que $ag^2(u) + b\,\underbrace{g^3(u)}_{=\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{0}$.

Et ainsi il vient que $ag^2(u) = \overrightarrow{0}$.
Or $g^2(u) \neq \overrightarrow{0}$ par hypothèse, donc $a = 0$.
$(\star)$ devient $bv + cw = \overrightarrow{0}$.
En appliquant de nouveau g il vient que $bg(v) + cg(w) = \overrightarrow{0}$ c'est à dire que $bg^2(u) + g^3(u) = \overrightarrow{0}$ qui amène par des arguments indentiques que $b = 0$.
La relation $(\star)$ se réduit alors à $cw = \overrightarrow{0}$, et une composition par g donne alors que $cg^2(u) = \overrightarrow{0}$ ce qui assure que $c = 0$.
Finalement, on a bien $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$, ce qui assure le caractère libre de la famille $\mathcal{C}$.
La famille $\mathcal{C}$ est alors une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, par théorème, elle en forme une base.

Q27. Déterminer alors la matrice B' de g dans la base $\mathcal{C}$.

Éléments de correction

Par construction des vecteurs de $\mathcal{C}$, il vient : $\left\{\begin{array}{rcl} g(u) & = & g(u) \\ & = & 0 \times u + 1 \times v + 0 \times w \\ g(v) & = & g^2(u) \\ & = & w \\ & = & 0 \times u + 0 \times v + 1 \times w \\ g(w) & = & g^3(u) \\ & = & \overrightarrow{0} \end{array}\right.$

et par suite, la matrice B' de g dans la base $\mathcal{C}$ est : $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie C | Généralisation

On suppose que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ différent de l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$ et tel que $\Phi \circ \Phi$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$.

Q28. Justifier qu'il existe un vecteur u non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Phi(u) \neq \overrightarrow{0}$.

Éléments de correction

Φ étant supposé non nul, il existe donc un vecteur u non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Phi(u) \neq \overrightarrow{0}$.
En effet, si ce n'était pas le cas, Φ serait l'endomorphisme nul.

Q29. Soit y un vecteur de $\mathrm{Im}\ (\Phi)$. Démontrer que $\Phi(y) = \overrightarrow{0}$.

Qu'en déduire pour $\mathrm{Im}\ (\Phi)$ et $\mathrm{Ker}\ (\Phi)$?

Éléments de correction

Puisque $y \in \mathrm{Im}\ (\Phi)$, il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = \Phi(x)$.
Par suite, $\Phi(y) = \Phi^2(x)$ et comme Φ^2 est l'endomorphisme nul, il vient que $\Phi^2(x) = \overrightarrow{0}$ et donc que $\Phi(y) = \overrightarrow{0}$.
Par conséquent $y \in \mathrm{Ker}\ (\Phi)$.
On en déduit alors que $\mathrm{Im}\ (\Phi) \subset \mathrm{Ker}\ (\Phi)$ et en particulier que $\dim(\mathrm{Im}\ (\Phi)) \leq \dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi))$.

Q30. Démontrer alors que $\mathrm{rg}\ (\Phi) = 1$ et que $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) = 2$.

Éléments de correction

En appliquant le théorème du rang appliqué à Φ, il vient que : $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) + \mathrm{rg}\ (\Phi)$.

D'après la question précédente, on a que $\dim(\mathrm{Im}\ (\Phi)) \leq \dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi))$.
Puisque Φ n'est pas l'endomorphisme nul, nécessairement $\mathrm{rg}\ (\Phi) \geq 1$.
Par disjonction des cas on a :

$\dim(\mathrm{Im}\ (\Phi)) = 1$ **et** $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) = 1$ **:** impossible car $1 + 1 \neq 3$

$\dim(\mathrm{Im}\ (\Phi)) = 1$ **et** $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) = 2$ **:** possible car $1 + 2 = 3$

$\dim(\mathrm{Im}\ (\Phi)) = 1$ **et** $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) = 3$ **:** possible car $1 + 3 \neq 3$

$\dim(\mathrm{Im}\ (\Phi)) = 2$ **et** $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) = 2$ **:** impossible car $2 + 2 \neq 2$

$\dim(\mathrm{Im}\ (\Phi)) = 2$ **et** $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) = 3$ **:** impossible car $2 + 3 \neq 4$

$\dim(\mathrm{Im}\ (\Phi)) = 3$ **et** $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) = 3$ **:** impossible car $3 + 3 \neq 4$

ce qui amène nécessairement $\dim(\mathrm{Im}\ (\Phi)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi)) = 2$.

Q31. Construire à l'aide du vecteur u précédemment défini et Φ, une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice M de Φ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

On considère la famille $\mathcal{C} = \big(u, \Phi(u), \Phi^2(u)\big)$.
On montre sur le même principe qu'à la question **20** que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis comme à la question **21** que la matrice de Φ dans cette base est exactement M.

Partie D | Généralisation (suite)

Dans cette partie, Ψ désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que Ψ^2 n'est pas l'endomorphisme nul mais où Ψ^3 est l'endomorphisme nul.

Q32. Justifier qu'il existe un vecteur u non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Psi^2(u) \neq \overrightarrow{0}$.

Éléments de correction

Puisque Ψ^2 n'est pas l'endomorphisme nul, il existe u non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Psi^2(u) \neq \overrightarrow{0}$.
En effet, si ce n'était pas le cas, Ψ^2 serait l'endomorphisme nul.

Q33. Démontrer que $\mathrm{Im}\ (\Psi) \subset \mathrm{Ker}\ \big(\Psi^2\big)$.

Éléments de correction

Soit $y \in \mathrm{Im}\,(\Psi)$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = \Psi(x)$.
Par suite, il vient que $\Psi(y) = \Psi^2(x)$ et donc $\Psi^2(y) = \Psi^3(x)$ et comme Ψ^3 est l'endomorphisme nul, on a $\Psi^3(x) = \overrightarrow{0}$, ce qui assure que $\Psi^2(y) = \overrightarrow{0}$ et donc que $y \in \mathrm{Ker}\,\left(\Psi^2\right)$.
Ainsi, on a bien $\mathrm{Im}\,(\Psi) \subset \mathrm{Ker}\,\left(\Psi^2\right)$.

Q34. Démontrer que $\mathrm{Im}\,\left(\Psi^2\right) \subset \mathrm{Ker}\,(\Psi)$.

Éléments de correction

Soit $y \in \mathrm{Im}\,\left(\Psi^2\right)$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = \Psi^2(x)$.
Par suite, il vient que $\Psi(y) = \Psi^3(x)$ et comme Ψ^3 est l'endomorphisme nul, on a $\Psi^3(x) = \overrightarrow{0}$, ce qui assure que $\Psi(y) = \overrightarrow{0}$ et donc que $y \in \mathrm{Ker}\,(\Psi)$.
Ainsi, on a bien $\mathrm{Im}\,\left(\Psi^2\right) \subset \mathrm{Ker}\,(\Psi)$.

Q35. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(\Psi) \subset \mathrm{Ker}\,\left(\Psi^2\right)$.

Éléments de correction

On reprend simplement le raisonnement de la question **23**.

Q36. Construire à l'aide du vecteur u précédemment défini et Ψ, une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice N de Φ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

On considère la famille $\mathcal{C} = \left(u, \Psi(u), \Psi^2(u)\right)$.
On montre sur le même principe qu'à la question **26** que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis comme à la question **27** que la matrice de Φ dans cette base est exactement M.

Problème no 3 | Étude de fonctions

On considère les deux fonctions f et g données par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 1 - (2x+1)\ln(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^2 + x} \end{array} \right.$$

dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives dans un repère orthogonal du plan.

Partie A | Étude d'une fonction intermédiaire

On considère $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 2x\ln(x) + 1 \end{array} \right.$.

Q37. Déterminer les variations de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Éléments de correction

On a directement que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(x) = 1 + 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} = 3 + 2\ln(x)$$

Ainsi, $h'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) > -\dfrac{3}{2}$, c'est à dire $x > \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ et $h'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.
On en déduit le tableau de variations de h :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de h	||	$\searrow$	$h\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right) > 0$	$\nearrow$	
Signe de $h(x)$	||		$+$		

Q38. En déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Éléments de correction

Comme $h\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right) = \ldots = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}} > 0$, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) > 0$, d'où le signe de h.

Partie B | Étude des variations de f

Q39. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.

Éléments de correction

Limite en 0 : en développant l'expression de f, il vient :

$$\underbrace{x+1}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} - 2\underbrace{x\ln(x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} -\infty} \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$$

Limite en $+\infty$: en factorisant l'expression de f par $(2x+1)$, il vient ;

$$\underbrace{(2x+1)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}\left(\underbrace{\frac{x+1}{2x+1}}_{=\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{2x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}} - \underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

Q40. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Éléments de correction

On trouve que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2\times\ln(x) - \frac{2x+1}{x} \\ &= \frac{-x-2x\ln(x)-1}{x} \\ &= -\frac{h(x)}{x} \end{aligned}$$

Q41. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Éléments de correction

On en déduit ainsi :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $h(x)$	$\Vert$		$+$		
Signe de $f'(x)$	$\Vert$		$-$		
Variations de f	$\Vert$ $+\infty$		$\searrow$		$-\infty$
Signe de $f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Q42. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $f(x) = 0$.

Éléments de correction

La fonction f est telle que :
- f est continue sur $]0; +\infty[$
- f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} = +\infty$ donc sont de signe opposées

donc par le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas strictement monotone, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Partie C | Étude des variations de g

Q43. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g.

Éléments de correction

Limite en 0 : il vient directement puisque $x^2 + x > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\xrightarrow[x\to0]{}-\infty}}{\underbrace{x^2+x}_{\xrightarrow[x\to0]{}0}} \xrightarrow[x\to0]{} -\infty$$

Limite en $+\infty$: en factorisant au numérateur par x^2, il vient :
$$\underbrace{\frac{\ln(x)}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Q44. Exprimer $g(\alpha)$ en fonction de α.

Éléments de correction

Par définition $g(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2+\alpha}$ et $f(\alpha) = 0$. Or $f(\alpha) = \alpha + 1 - (2\alpha+1)\ln(\alpha)$ et ainsi $\ln(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}$. Par suite, il vient $g(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$

Q45. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Éléments de correction

On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times \left(x^2+x\right) - \ln(x) \times (2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2} = \frac{x+1-(2x+1)\ln(x)}{\left(x^2+x\right)^2} = \frac{f(x)}{\left(x^2+x\right)^2}$$

Q46. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Éléments de correction

On en déduit donc directement que :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Signe de $g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de g	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha) > 0$	$\searrow$	0

Q47. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

Éléments de correction

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 pour g est ainsi : $$y = g'(1)(x-1)g(1).$$
Or $g'(1) = \frac{1}{2}$ et $g(1) = 0$, et ainsi, on obtient : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$