Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Adapté de ENS 2021 Filière D2

Dans tout ce problème, on désigne par E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

On définit la fonction cotangente notée cotan, lorsque cela est possible par : $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Dans tout ce qui suit, f désigne un élément fixé de E.

Partie A | Résultats préliminaires

Q1. Donner le domaine de définition de la fonction $g : x \longmapsto \operatorname{cotan}(\pi x)$.

Q2. Montrer que la fonction g est impaire.

Q3. À l'aide d'un développement limité, déterminer la limite en 0 de la fonction de $x \longmapsto x \operatorname{cotan}(\pi x)$.

Q4. Déterminer ensuite la limite en 1 de la fonction $x \longmapsto (x-1)\operatorname{cotan}(\pi x)$.

Q5. Justifier que g est dérivable sur $]0;1[$.

Puis montrer que la dérivée de la fonction g sur $]0;1[$ est égale à $x \longmapsto -\pi\left(1 + (\operatorname{cotan}(\pi x))^2\right)$.

Q6. Dresser le tableau de variations de g puis construire la courbe représentative de la fonction g sur $]0;1[$.

Q7. On définit la fonction h par : $h : \left|\begin{array}{ccc}]0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array}\right.$.

Montrer que h tend vers $f'(0)$ lorsque x tend vers 0 avec $x > 0$.

Q8. De même, déterminer la limite de la fonction k lors que x tend vers 1 avec $x < 1$ où :

$$k : \left|\begin{array}{ccc} [0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x-1} \end{array}\right.$$

Partie B | Inégalité de Poincaré

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 f(x)f'(x)\text{cotan}\,(\pi x)\,\mathrm{d}x \text{ et } J = \int_0^1 \left(f'(x) - \pi f(x)\text{cotan}\,(\pi x)\right)^2\,\mathrm{d}x$$

Q9. À l'aide des questions précédentes, montrer que la fonction $p : x \longmapsto f(x)f'(x)\text{cotan}\,(\pi x)$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

Qu'en déduire pour I ?

Q10. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b < 1$. Appliquer une intégration par parties à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)f'(x)\text{cotan}\,(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

Q11. À l'aide de la question précédente, montrer que : $\displaystyle 2\pi I = \pi^2 \int_0^1 (f(x))^2 \left(1 + (\text{cotan}\,(\pi x))^2\right)\mathrm{d}x$

Q12. Montrer que la fonction $q : x \longmapsto \left(f'(x) - \pi f(x)\text{cotan}\,(\pi x)\right)^2$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

Qu'en déduire pour J ?

Q13. À l'aide de la linéarité de l'intégrale, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$

Problème n° 2 | Extrait ENS 2022 Filière D2

Partie 1 | Étude d'une fonction

On considère la fonction t définie par : $t : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \end{array}$.

Q14. Justifier que t est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q15. Déterminer les limites de t en $+\infty$ et en $-\infty$.

Q16. Construire, en le justifiant, le tableau de variation de t sur $\mathbb{R}$, puis construire la courbe représentative de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Q17. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que : $\displaystyle t\,(x+y) = \frac{t(x) + t(y)}{1 + t(x)t(y)}$

Partie B | Résolution d'une équation fonctionnelle

Dans tout ce qui suit, on étudie les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)| < 1 \text{ et } f\,(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$$

Q18. Montrer que $f(0) = 0$.

Q19. On suppose que f est continue en 0. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Q20. On suppose jusqu'à la fin du problème, que f est dérivable en 0.

Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q21. Montrer que f est impaire.

Q22. On suppose dans cette question que f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}$.

Q23. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

Montrer que, pour tout nombre réel a, le rapport $\dfrac{g(x+a)}{g(x)}$ est indépendant de x.

Q24. En déduire les fonctions g, puis f.

On pourra au préalable calculer $g'(x)$.

Problème n° 3 | Extrait ENS 2022 Filière D2

Soit $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et $\mathrm{I}_3 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice identité.

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A, aussi appelé le commutant de A, c'est à dire :

$$C(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$$

Partie A | Quelques propriétés du commutant

Dans cette partoe A désigne un élément de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Q25. Donner deux éléments évidents appartenant à $C(A)$.

Q26. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Q27. Montrer que si M et M' sont des élḿents de $C(A)$, alors MM' est aussi un élément de $C(A)$.

Q28. Montrer que si $M \in C(A)$ est inversible, alors son inverse M^{-1} est aussi un élément de $C(A)$.

Partie B | Commutant d'une matrice diagonale

Dans cette partie, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ désigne une matrice diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Q29. Soit $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles conditions doit-elle vérifier pour appartenir à $C(D)$?

Q30. On suppose que les trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 sont distincts deux à deux.

Montrer que M est nécessairement une matrice diagonale.

Q31. On suppose dans cette question que $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_3$.

Déterminer $C(D)$, puis donner une base et la dimension de $C(D)$.

Partie C | Commutant d'une matrice donnée

On se propose dans cette partie de déterminer le commutant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Q32. Montrer que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et P est une matrice que l'on déterminera.

Q33. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on a l'équivalence :

$$\left(M \in C(A) \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(P^{-1}MP \in C(D) \right)$$

Q34. En déduire la dimension de $C(A)$.

Q35. Montrer que la famille $\left\{ \mathrm{I}_3, A, A^2 \right\}$ est une base de $C(A)$.