Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question… **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Convergence de suites de matrices

Pour une matrice $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont quatre suites de réels, on dit que la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices convergente lorsque les quatre suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et si on note a, b, c et d leurs limites respectives, on dira que la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ou encore que A est la limite de la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie A | Exemples de suites de matrices

Q1. On considère la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \begin{pmatrix} 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

La suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle matrice converge-t-elle ?

Q2. On considère la suite de matrices $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & n^2\mathrm{e}^{-n} \\ 1 & \frac{n+1}{2n+2} \end{pmatrix}$.

La suite de matrices $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle matrice converge-t-elle ?

Q3. On considère la suite de matrices $(C_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n = \begin{pmatrix} 2-\frac{\ln(n)}{n^2} & 1 \\ 1 & 2+\frac{(-1)^n}{n} \end{pmatrix}$.

La suite de matrices $(C_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle matrice converge-t-elle ?

Q4. On considère la suite de matrices $(D_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \begin{pmatrix} n\mathrm{e}^{-n} & \frac{n+1}{2n+2} \\ \frac{(-1)^n}{n} & \ln(n) \end{pmatrix}$.

La suite de matrices $(D_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle matrice converge-t-elle ?

Partie B | Étude d'une suite de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Q5. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible, et déterminer P^{-1}.

Q6. On désigne par D la matrice diagonale de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Effectuer les produits AP et PD, puis en déduire une expression de A en fonction de P, D et P^{-1}.

Q7. Sans démonstration, donner une expression de D^n en fonction de n.

Q8. Montrer par récurrence sur l'entier n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Q9. Déterminer alors l'expression de A^n en fonction de n.

Q10. On considère alors la suite de matrices $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = A^n$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Et si oui, quelle est sa limite ?

Partie C | Matrice clignotante de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Dans toute cette partie, on désigne par T et N les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ données par $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q11. Exprimer N^2 à l'aide de N.

Q12. Montrer par récurrence sur l'entier p que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ T^{2p} = \dfrac{1}{2^{p+1}}N$.

On admet pour la suite de cette partie que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ T^{2p-1} = \dfrac{1}{2^{p-1}}T$

On se propose de calculer la limite de la suite de matrice $(C_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T^k$.

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} T^k = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) N + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) T$.

Q14. Déterminer la limite des suites de terme général $\dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ et $2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

En déduire que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} T^k$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Q15. En s'inspirant des questions précédentes, montrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} T^k$ converge aussi vers la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Q16. Qu'en conclure pour la suite de matrices $(C_n)_{n\geq 1}$?

Problème 2 | Étude de suites se ramenant à des suites de référence

Partie A | Suite se ramenant à une suite arithmétique

On considère dans cette partie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 32 \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1} & = & \dfrac{2u_n-1}{u_n+4}\end{array}\right.$

Q17. Montrer que l'équation $x=\dfrac{2x-1}{x+4}$ d'inconnue le réel x possède une unique solution que l'on notera α pour la suite.

Q18. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\, v_n=\dfrac{1}{u_n-\alpha}$.

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.

Q19. Déduire de ce qui précède une expression de u_n en fonction de n.

Q20. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Partie B | Suite se ramenant à une suite géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}u_n+n-1\end{array}\right.$

Pour tout entier naturel n, on note $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère par ailleurs la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=4u_n-8n+24$.

Q21. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on identifiera les éléments caractéristiques.

Q22. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Q23. Justifier alors que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2n-6$.

Q24. Déduire de la question précédente une expression de S_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Partie C | Suite se ramenant à une suite récurrente linéaire d'ordre 2

L'objet de cette partie est de déterminer l'expression du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation suivante :

$$(\star):\ u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n=2n-1$$

Q25. Donner la forme générale du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes vérifient la relation :

$$(\diamond):\quad \forall n\in\mathbb{N},\, v_{n+2}-5v_{n+1}+6v_n=0$$

Q26. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n\in\mathbb{N},\, w_n=an+b$.

Déterminer le(s) couple(s) (a,b) pour que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\, w_{n+2}-5w_{n+1}+6w_n=2n-1$.

Q27. On considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes vérifient $(\diamond)$.

Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $t_n=v_n+n+1$ vérifie la relation $(\star)$.

Q28. Déduire de ce qui précède l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & -1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n & = & 2n-1\end{array}\right.$$

Problème 3 | Calcul des puissances d'une matrice

Dans tout ce qui suit A désigne une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la relation : $(\star) : (A - \mathrm{I}_3)(A + 2\mathrm{I}_3) = (0)$
L'objet de ce problème est de déterminer une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie A | Préliminaire technique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations : $(\clubsuit) : \left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} & = & 2u_n - u_{n+1} \end{array}\right.$

Q29. Déterminer un expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Partie B | Calcul de A^n à partir de suites

Q30. Montrer que la matrice A vérifie aussi la relation $(A + 2\mathrm{I}_3)(A - \mathrm{I}_3) = (0)$.

Q31. À l'aide de $(\star)$, exprimer A^2 en fonction de A et I_3.

Q32. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n \mathrm{I}_3$ ».

Vérifier que les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies en précisant les valeurs de u_0, u_1, v_0 et v_1.

Q33. Montrer alors par récurrence sur l'entier n, que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Q34. On considère alors les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\mathcal{P}(n)$, et on admet que ces dernières sont telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & v_n - u_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n \end{array}\right.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\clubsuit)$.

Q35. Déterminer alors les expressions des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Q36. En déduire une expression de A^n en fonction de A, I_3 et n.

Partie C | Application

Dans cette partie, on considère les matrices A et J donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Q37. Exprimer J^2 en fonction de J.

Q38. En remarquant que $A = \mathrm{I}_3 + J$, montrer que A vérifie $(\star)$.

Q39. Donner alors l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.