À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème nº 1 | Convergence de suites de matrices

Pour une matrice $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont quatre suites de réels, on dit que la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices convergente lorsque les quatre suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et si on note a, b, c et d leurs limites respectives, on dira que la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ou encore que A est la limite de la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie A | Exemples de suites de matrices

Q1. On considère la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \begin{pmatrix} 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

La suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle matrice converge-t-elle ?

Éléments de correction

Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$, par théorème, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\left(-\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par suite les quatre suites définissant la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et il vient que :

$$\begin{pmatrix} 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q2. On considère la suite de matrices $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} & n^2\mathrm{e}^{-n} \\ 1 & \frac{n+1}{2n+2} \end{pmatrix}$.

La suite de matrices $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle matrice converge-t-elle ?

Éléments de correction

Il est clair que : $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par croissances comparées, on sait que : $n^2\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n+1}{2n+2} = \dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{2}{n}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{2}{n}}$

et que $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par quotient, on en déduit que $\dfrac{n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.
Par suite les quatre suites définissant la suite de matrices $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et il vient que :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & n^2\mathrm{e}^{-n} \\ 1 & \dfrac{n+1}{2n+2} \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Q3. On considère la suite de matrices $(C_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_n = \begin{pmatrix} 2-\dfrac{\ln(n)}{n^2} & 1 \\ 1 & 2+\dfrac{(-1)^n}{n} \end{pmatrix}$.

La suite de matrices $(C_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle matrice converge-t-elle ?

Éléments de correction

Par croissances comparées, on sait que : $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi $2-\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Par ailleurs, il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$

Comme $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\dfrac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $2+\dfrac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
Par suite les quatre suites définissant la suite de matrices $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et il vient que :

$$\begin{pmatrix} 2-\dfrac{\ln(n)}{n^2} & 1 \\ 1 & 2+\dfrac{(-1)^n}{n} \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q4. On considère la suite de matrices $(D_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \begin{pmatrix} n\mathrm{e}^{-n} & \dfrac{n+1}{2n+2} \\ \dfrac{(-1)^n}{n} & \ln(n) \end{pmatrix}$.

La suite de matrices $(D_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle matrice converge-t-elle ?

Éléments de correction

D'après les questions précédentes, il vient que $n\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\dfrac{n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or on a $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi, une des suites définissant la suite de matrices $(D_n)_{n\geq 1}$ étant divergente, la suite de matrices $(D_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas être convergente.

Partie B | Étude d'une suite de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Q5. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible, et déterminer P^{-1}.

Éléments de correction

Puisque $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par théorème, on sait que : $\quad (P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \quad \Leftrightarrow \quad (\det(P) \neq 0)$
Or ici on a clairement que :

$$\begin{aligned} \det(P) &= 3 \times 3 - 4 \times (-3) \\ &= 9 + 12 \\ &= 21 \end{aligned}$$

et donc on a $\det(P) \neq 0$, ce qui assure que P est inversible.

Par ailleurs, la formule donnant l'inverse d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ permet d'écrire que : $\quad P^{-1} = \dfrac{1}{21}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Q6. On désigne par D la matrice diagonale de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Effectuer les produits AP et PD, puis en déduire une expression de A en fonction de P, D et P^{-1}.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que : $\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ainsi que : $\quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ce qui assure que $AP = PD$.
Par suite en multipliant cette relation à droite par P^{-1} qui existe, il vient que : $\quad A = PDP^{-1}$

Q7. Sans démonstration, donner une expression de D^n en fonction de n.

Éléments de correction

On peut montrer par récurrence sur l'entier n que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

Q8. Montrer par récurrence sur l'entier n que l'on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Éléments de correction

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a $A^0 = \mathrm{I}_2$ par convention, et il est immédiat que :

$$\begin{aligned} PD^0P^{-1} &= P\mathrm{I}_2P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_2 \end{aligned}$$

et ainsi, on a bien $A^0 = PD^0P^{-1}$ ce qui est exactement $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $A^n = PDP^{-1}$.
Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Par définition : $\quad A^{n+1} = A^n \times A$.
Par hypothèse de récurrence et par définition de A, il vient : $\quad A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$
Par suite, on a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= D^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n\mathrm{I}_2DP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Q9. Déterminer alors l'expression de A^n en fonction de n.

Éléments de correction

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ A^n &= \frac{1}{21}\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\ -4 & 3\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{21}\begin{pmatrix}3 & -3\left(-\frac{1}{6}\right)^n\\ 4 & 3\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\ -4 & 3\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3+4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 3-3\left(-\frac{1}{6}\right)^n\\ 4-4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 4+3\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Q10. On considère alors la suite de matrices $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = A^n$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Et si oui, quelle est sa limite ?

Éléments de correction

Puisque $\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$, par théorème, il vient que $\left(-\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par suite on en déduit que :

$$3+4\left(-\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$$

$$3-3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3 \qquad 4-4\left(-\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$$

$$4+3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$$

Par suite les quatre suites définissant la suite de matrices $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et il vient que :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3+4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 3-3\left(-\frac{1}{6}\right)^n\\ 4-4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 4+3\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{3}{7}\\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$$

Partie C | Matrice clignotante de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Dans toute cette partie, on désigne par T et N les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ données par $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Q11. Exprimer N^2 à l'aide de N.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que $N^2 = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ c'est à dire que $N^2 = 2N$.

Q12. Montrer par récurrence sur l'entier p que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ T^{2p} = \frac{1}{2^{p+1}}N$.

Éléments de correction

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(p)$: « $T^{2p} = \frac{1}{2^{p+1}} T$ »
Montrons par récurrence sur l'entier p que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : on a clairement que $T^{2\times 1} = T^2$ et un calcul direct donne que $T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

ce que l'on peut écrire aussi : $T^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et donc que : $T^2 = \frac{1}{4}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=N}$

et comme il est clair que $\frac{1}{2^{1+1}} = \frac{1}{4}$, il vient que : $T^2 = \frac{1}{2^{1+1}} N$

Ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Supposons que l'on a $\mathcal{P}(p)$.

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(p+1)$.

Il est clair que : $\begin{aligned} T^{2(p+1)} &= T^{2p+2} \\ &= T^{2p} \times T^2 \end{aligned}$

Par hypothèse de récurrence, et en utilisant la valeur de T^2, il vient donc que :

$$T^{2(p+1)} = \frac{1}{2^{p+1}} N \times \frac{1}{4} N$$

et comme $4 = 2^2$ce qui donne dans un premier temps que : $T^{2(p+1)} = \frac{1}{2^{p+3}} N^2$

et comme $N^2 = 2N$, il vient que : $T^{2(p+1)} = \frac{1}{2^{p+2}} N$.

ce qui est explicitement $\mathcal{P}(p+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(p)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier p.

On admet pour la suite de cette partie que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, T^{2p-1} = \frac{1}{2^{p-1}} T$

On se propose de calculer la limite de la suite de matrice $(C_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $C_n = \sum_{k=1}^{n} T^k$.

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que : $\sum_{k=1}^{2n} T^k = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) N + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) T$.

Éléments de correction

En séparant les termes d'indices pairs et impairs de cette somme, il vient que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} T^k &= \sum_{p=1}^{n} T^{2p} + \sum_{p=1}^{n} T^{2p-1} \\ &= \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{p+1}} N\right) + \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{p-1}} T\right) \\ &= \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p+1}}\right) N + \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p-1}}\right) T \end{aligned}$$

En remarquant que $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p+1}} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^p}$, on reconnaît la somme des termes d'indices 1 à n d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$.

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p+1}} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^1} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Il est alors clair que :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p-1}} &= 4\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^p} \\ &= 4 \times \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ &= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

et on obtient la relation demandée.

Q14. Déterminer la limite des suites de terme général $\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et $2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

En déduire que la somme $\sum_{k=1}^{2n} T^k$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, par théorème, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par suite $\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et $2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Par suite, la somme $\sum_{k=1}^{2n} T^k$ converge vers la matrice $\frac{1}{2}N + 2T$ qui est explicitement la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Q15. En s'inspirant des questions précédentes, montrer que la somme $\sum_{k=1}^{2n+1} T^k$ converge aussi vers la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

En séparant les termes d'indices pairs et impairs de cette somme, il vient que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n-1} T^k &= \sum_{p=1}^{n-1} T^{2p} + \sum_{p=1}^{n} T^{2p-1} \\ &= \sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2^{p+1}}N\right) + \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{p-1}}T\right) \\ &= \left(\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{2^{p+1}}\right)N + \left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2^{p-1}}\right)T \end{aligned}$$

En remarquant que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2^{p+1}} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^p}$, on reconnaît la somme des termes d'indices 1 à $n-1$ d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$.

Il vient alors que :
$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2^{p+1}} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^1} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\end{aligned}$$

Il est alors clair par ce qui précde que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2^{p-1}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$

et on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} T^k = \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) N + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) T$

qui donne le même résultat que précdemment par passage à la limite.

Q16. Qu'en conclure pour la suite de matrices $(C_n)_{n\geq 1}$?

Éléments de correction

D'après ce qui précède, les deux suites extraites des termes d'indices pairs et impairs de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même matrice.
Cela signifie que pour chacun des coefficients de la matrice C_n, les deux suites extraites des termes d'indices pairs et impairs convergent vers la même limite, ce qui par théorème, assure la convergence de la suite donnée par ce coefficient.
Par suite les neuf suites définissant la suite de matrices $(C_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes et ainsi la suite de matrices $(C_n)_{n\geq 1}$ est convergente et on a :

$$\sum_{k=1}^{n} T^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problème 2 | Étude de suites se ramenant à des suites de référence

Partie A | Suite se ramenant à une suite arithmétique

On considère dans cette partie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 &=& 32 \\ \forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1} &=& \dfrac{2u_n-1}{u_n+4}\end{array}\right.$

Q17. Montrer que l'équation $x = \dfrac{2x-1}{x+4}$ d'inconnue le réel x possède une unique solution que l'on notera α pour la suite.

Éléments de correction

Cette équation n'a de sens que si $x \neq -4$. Sous cette hypothèse, on a alors :

$$\begin{aligned}\left(x = \frac{2x-1}{x+2}\right) &\Leftrightarrow (x(x+4) = 2x-1) \\ &\Leftrightarrow \left(x^2+4x-2x+1=0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x^2+2x+1=0\right) \\ &\Leftrightarrow \left((x+1)^2=0\right) \\ &\Leftrightarrow (x=-1)\end{aligned}$$

et ainsi l'équation $x = \dfrac{2x-1}{x+4}$ admet comme unique solution le réel $\alpha = -1$

Q18. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$.

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.

Éléments de correction

On a directement que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}-\alpha} - \frac{1}{u_n - \alpha}\\ &= \frac{1}{\dfrac{2u_n-1}{u_n+4} - \alpha} - \frac{1}{u_n-\alpha}\\ &= \frac{1}{\dfrac{2u_n - 1 - \alpha(u_n+4)}{u_n+4}} - \frac{1}{u_n-\alpha}\\ &= \frac{u_n+4}{2u_n-1+u_n+4} - \frac{1}{u_n+1}\\ &= \frac{u_n+4}{3u_n+3} - \frac{1}{u_n+1}\\ &= \frac{1}{3}\frac{u_n+4}{u_n+1} - \frac{1}{u_n+1}\\ &= \frac{u_n+4-3}{u_n+1}\\ &= \frac{u_n+1}{u_n+1}\\ &= 1\end{aligned}$$

et par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{33}$.

Q19. Déduire de ce qui précède une expression de u_n en fonction de n.

Éléments de correction

Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{33}$, il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n + \frac{1}{33}$$

La relation entre $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne directement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{v_n} - 1$

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n + \dfrac{1}{33}} - 1$

Q20. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Éléments de correction

Il est immédiat que : $\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{33}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

par suite, il vient que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Partie B | Suite se ramenant à une suite géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}u_n+n-1 \end{cases}$

Pour tout entier naturel n, on note $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère par ailleurs la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=4u_n-8n+24.$

Q21. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on identifiera les éléments caractéristiques.

Éléments de correction

On utilise la caractérisation des suites géométriques :

$$\left((v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } q\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}=q\times v_n\right)$$

Or ici, on a :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{aligned} v_{n+1} &= 4u_{n+1}-8(n+1)+24 \\ &= 4\left(\frac{1}{2}u_n+n-1\right)-8n-8+24 \\ &= 2u_n+4n-4-8n+16 \\ &= 2u_n-4n+12 \\ &= \frac{1}{2}(4u_n-8n+24) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=4u_0-8\times 0+24$ c'est à dire $v_0=28$.

Q22. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Éléments de correction

On déduit donc de la question précédente que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=28\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$

Q23. Justifier alors que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2n-6.$

Éléments de correction

Puisque l'on a : $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=4u_n-8n+24$, il vient que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\dfrac{1}{4}(v_n+8n-24).$

Par conséquent, on en déduit que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{aligned} u_n &= \frac{1}{4}(v_n+8n-24) \\ &= \frac{1}{4}\left(28\left(\frac{1}{2}\right)^n+8n-24\right) \\ &= 7\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-6 \end{aligned}$$

Q24. Déduire de la question précédente une expression de S_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Éléments de correction

En remarquant que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-6+n\times 2,$ il vient que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n &= \sum_{k=0}^{n}\left(7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 6 + n\times 2\right)\\
&= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} 7\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{\substack{\text{Somme des } n+1 \text{ premiers termes d'une}\\ \text{suite géométrique de premier terme 7 et de raison } \frac{1}{2}}} + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}(-6+n\times 2)\right)}_{\substack{\text{Somme des } n+1 \text{ premiers termes d'une}\\ \text{suite arithmétique de premier terme } -6 \text{ et de raison } 2}}\\
&= 7\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \left(-6\times(n+1) + 2\times\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= 7\left(2-\frac{1}{2^n}\right) + (n+1)(n-6)
\end{aligned}$$

Partie C | Suite se ramenant à une suite récurrente linéaire d'ordre 2

L'objet de cette partie est de déterminer l'expression du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation suivante :

$$(\star) : u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2n - 1$$

Q25. Donner la forme générale du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes vérifient la relation :

$$(\diamond) : \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 0$$

Éléments de correction

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont les racines de l'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.
Par théorème, il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.

Q26. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = an + b$.

Déterminer le(s) couple(s) (a, b) pour que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} - 5w_{n+1} + 6w_n = 2n - 1$.

Éléments de correction

On a donc :

$$\begin{aligned}
& (\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} - 5w_{n+1} + 6w_n = 2n - 1)\\
\Leftrightarrow\ & (\forall n \in \mathbb{N}, a(n+2) + b - 5\left(a(n+1) + b\right) + 6\left(an + b\right) = 2n - 1)\\
\Leftrightarrow\ & (\forall n \in \mathbb{N}, 2an - 3a + 2b = 2n - 1)\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2a = 2 \\ -3a + 2b = -1 \end{cases}\\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

et par conséquent, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $w_n = n + 1$ convient.

Q27. On considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes vérifient $(\diamond)$.

Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $t_n = v_n + n + 1$ vérifie la relation $(\star)$.

Éléments de correction

Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait $(\diamond)$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.
et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \lambda 2^n + \mu 3^n + n + 1$.

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{N},\ t_{n+2}-6t_{n+1}+5t_n &= \lambda 2^{n+2}+\mu 3^{n+2}+n+3-6\left(\lambda 2^{n+1}+3^{n+1}+n+2\right)+5\left(\lambda 2^n+3^n+n+1\right)\\ &= \underbrace{\lambda 2^{n+2}+\mu 3^{n+2}-6\left(\lambda 2^{n+1}+\mu 3^{n+1}\right)+5\left(2^n+3^n\right)}_{=0 \text{ car } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie } (\diamond)}+2n-1\\ &= 2n-1\end{aligned}$$

ce qui est bien la relation $(\star)$.

Q28. Déduire de ce qui précède l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_0 &= 1\\ u_1 &= -1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n &= 2n-1\end{cases}$$

Éléments de correction

D'après ce qui précéde, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda 2^n+\mu 3^n+n+1$
où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ vérifie la relation $(\star)$.
Il reste alors à déterminer (λ,μ) en utilisant le fait que $u_0=1$ et $u_1=-1$.
On obtient alors le système d'équations $\begin{cases}\lambda+\ \ \mu=0\\ 2\lambda+3\mu=-3\end{cases}$ qui donne alors que $\lambda=3$ et $\mu=-3$
Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui répond au problème est donnée par : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=3\times 2^n-3\times 3^n+2n-1$

Problème 3 | Calcul des puissances d'une matrice

Dans tout ce qui suit A désigne une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie la relation : $(\star) : (A-\mathrm{I}_3)(A+2\mathrm{I}_3)=(0)$
L'objet de ce problème est de déterminer une expression de A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$.

Partie A | Préliminaire technique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations : $(\clubsuit) : \begin{cases} u_0 &= 0\\ u_1 &= 1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} &= 2u_n-u_{n+1}\end{cases}$

Q29. Déterminer un expression du terme général u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Éléments de correction

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont les racines de l'équation caractéristique $r^2+r-2=0$ sont $r_1=1$ et $r_2=-2$.
Par suite, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda+\mu(-2)^n$.
Par ailleurs comme $u_0=0$ et $u_1=1$, il vient que (λ,μ) est solution du système $\begin{cases}\lambda+\ \ \mu=0\\ \lambda-2\mu=1\end{cases}$ ce qui amène que $\lambda=\dfrac{1}{3}$ et $\mu=-\dfrac{1}{3}$.
Finalement, on en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}(-2)^n$.

Partie B | Calcul de A^n à partir de suites

Q30. Montrer que la matrice A vérifie aussi la relation $(A+2\mathrm{I}_3)(A-\mathrm{I}_3)=(0)$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}(A-\mathrm{I}_3)(A+2\mathrm{I}_3) &= A^2+2A\mathrm{I}_3-\mathrm{I}_3A-2\mathrm{I}_3^2\\ &= A^2+2A-A-2\mathrm{I}_3\\ &= A^2+A-2\mathrm{I}_3\end{aligned}$$
et comme A vérifie $(\star)$, il vient $A^2+A-\mathrm{I}_3=(0)$.
Par ailleurs, on a que :
$$\begin{aligned}(A+2\mathrm{I}_3)(A-\mathrm{I}_3) &= A^2-A\mathrm{I}_3+2\mathrm{I}_3A-\mathrm{I}_3^2\\ &= A^2-A+2A-\mathrm{I}_3\\ &= A^2+A-2\mathrm{I}_3\end{aligned}$$
et ainsi : $(A+2\mathrm{I}_3)(A-\mathrm{I}_3)=(0)$

Q31. À l'aide de $(\star)$, exprimer A^2 en fonction de A et I_3.

Éléments de correction

Les calculs précédents donnent que : $A^2+A-2\mathrm{I}_3=(0)$
ce qui assure que $A^2=2\mathrm{I}_3-A$.

Q32. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n=u_nA+v_n\mathrm{I}_3$ ».

Vérifier que les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies en précisant les valeurs de u_0, u_1, v_0 et v_1.

Éléments de correction

Vérification de $\mathcal{P}(0)$: puisque $A^0=\mathrm{I}_3$, il est immédiat que $A^0=0A+1\mathrm{I}_3$, et par suite, en posant $u_0=0$ et $v_0=1$, on a bien l'existence de $(u_0,v_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $A^0=u_0A+v_0\mathrm{I}_3$, ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.

Vérification de $\mathcal{P}(1)$: puisque $A=1A+0\mathrm{I}_3$, en posant $u_1=1$ et $v_1=0$, on a bien l'existence de $(u_1,v_1)\in\mathbb{R}^2$ tel que $A^1=u_1A+v_1\mathrm{I}_3$, ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

Q33. Montrer alors par récurrence sur l'entier n, que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

Éléments de correction

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« il existe deux réels u_n et v_n tel que $A^n=u_nA+v_n\mathrm{I}_3$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : cela a été fait à la question précdente.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Par définition, on a : $A^{n+1}=A^n\times A$.
Par hypothèse de récurrence, il existe (u_n,v_n) tel que $A^n=u_nA+v_n\mathrm{I}_3$.
Ainsi, il vient :
$$\begin{aligned}A^{n+1} &= (u_nA+v_n\mathrm{I}_3)\times A\\ &= u_nA^2+v_nA\\ &= u_n(2\mathrm{I}_3-A)+v_nA\\ &= 2u_n\mathrm{I}_3-u_nA+v_nA\\ &= (v_n-u_n)A+2u_n\mathrm{I}_3\end{aligned}$$
Ainsi, en posant $u_{n+1}=v_n-u_n$ et $v_{n+1}=2u_n$, il vient donc qu'il existe $(u_{n+1},v_{n+1})\in\mathbb{R}^2$ tel que $A^{n+1}=u_{n+1}A+v_{n+1}\mathrm{I}_3$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q34. On considère alors les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\mathcal{P}(n)$, et on admet que ces dernières sont telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}u_{n+1} &= v_n-u_n\\ v_{n+1} &= 2u_n\end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\clubsuit)$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_{n+1} = v_n - u_n$, on en déduit que $u_{n+2} = v_{n+1} - u_{n+1}$ et donc que $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$ c'est à dire que $u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$.
Par ailleurs, on a bien $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, ce qui assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien ($\clubsuit$).

Q35. Déterminer alors les expressions des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Éléments de correction

D'après la partie A, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(-2)^n$.

Par suite, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}(-2)^{n-1}$

Q36. En déduire une expression de A^n en fonction de A, I_3 et n.

Éléments de correction

Il est alors immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(-2)^n\right) A + \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}(-2)^{n-1}\right) \mathrm{I}_3$.

Partie C | Application

Dans cette partie, on considère les matrices A et J donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Q37. Exprimer J^2 en fonction de J.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ce qui donne que $J^2 = -3J$.

Q38. En remarquant que $A = \mathrm{I}_3 + J$, montrer que A vérifie ($\star$).

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} (A - \mathrm{I}_3)(A + 2\mathrm{I}_3) &= J(3\mathrm{I}_3 + J) \\ &= 3J + J^2 \\ &= 3J - 3J \\ &= (0) \end{aligned}$$
ce qui assure que A vérifie ($\star$).

Q39. Donner alors l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Éléments de correction

Puisque A vérifie ($\star$), d'après ce qui précède, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(-2)^n\right) A + \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}(-2)^{n-1}\right) \mathrm{I}_3$

ce qui donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1}{3} - \dfrac{(-2)^n}{3} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{3} - \dfrac{(-2)^n}{3} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$