Chapitre | TX05

Équations de degré 1 et de degré 2 et s'y ramenant

Version du 12-05-2023 à 10:40

Contexte

L'objet de ce document consiste à vous faire travailler votre dextérité de calcul pour la résolution d'équations se ramenant à une forme du type $ax+b=0$ ou $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x.

1. Équations se ramenant à une forme du type $ax+b=0$

Théorème 1

On considère l'équation d'inconnue le réel x : $(\diamond)$: $ax+b=0$ où $a \neq 0$.

L'équation $(\diamond)$ admet une unique solution notée x_0 qui vaut : $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

On pourra adopter la rédaction suivante pour sa résolution : $(ax+b=0) \Leftrightarrow (ax=-b) \Leftrightarrow \left(x=-\dfrac{b}{a}\right)$

Exemple 1| Résolution directe

L'équation $(\diamond)$: $2x+3=0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

On résoud $(\diamond)$:

$$\begin{aligned} (2x+3=0) &\Leftrightarrow (2x=-3) \\ &\Leftrightarrow \left(x=-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

et ainsi $(\diamond)$ admet une unique solution notée x_0 donnée par : $x_0=-\dfrac{3}{2}$.

Exemple 2| Cas se ramenant à une équation de degré 1

L'équation $(\diamond)$: $(x-1)(x+2)=x^2-6x+3$ d'inconnue le réel x, admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

Ce n'est pas une équation de degré 1.

Développer le membre de gauche de l'équation...

On résoud $(\diamond)$:

$$\begin{aligned} ((x-1)(x+2)=x^2-6x+3) &\Leftrightarrow (x^2+2x-x-2=x^2-6x+3) \\ &\Leftrightarrow (x^2+x-2=x^2-6x+3) \\ &\Leftrightarrow (x^2+x-2-x^2+6x-3=0) \\ &\Leftrightarrow (7x-5=0) \\ &\Leftrightarrow (7x=5) \\ &\Leftrightarrow \left(x=\frac{5}{7}\right) \end{aligned}$$

et ainsi $(\diamond)$ admet une unique solution notée x_0 donnée par : $x_0 = \dfrac{5}{7}$.

Application 1 | Réf. 4961

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions ? Si oui, les expliciter.

1. $(\star_1) : 2x(x-1)+3x = (x-1)(2x-1)$
2. $(\star_2) : x^2-6x+1 = (x-3)(x-4)$
3. $(\star_3) : 3x+1-(x-1)(2x-3) = (2x+1)(x-1)+2$
4. $(\star_4) : x(x-1)-x(x+1) = x(x-2)-x(x+2)$

2. Équations se ramenant à une forme du type $ax^2+bx+c=0$

Théorème 2 | Résolution d'un équation de degré 2

On considère l'équation d'inconnue le réel x : $(\star) : ax^2+bx+c=0$ où $a \neq 0$.

On appelle discriminant de l'équation $(\star)$ le nombre $b^2-4\times a\times c = \Delta$.

Si $\Delta < 0$, alors l'équation $(\star)$ ne possède pas de solutions réelle.

Si $\Delta \geq 0$, alors l'équation $(\star)$ possède deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans le cas où $\Delta = 0$, on a clairement $x_1 = x_2$, et on dit alors que x_1 est une racine double et on peut même retenir dans ce cas que $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.

Exemple 3 | Équation de degré 2 à discriminant strictement positif

L'équation $(\star) : x^2-5x+6=0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

L'équation $(\star)$ est bien une équation de degré 2.
Son discriminant Δ est donné par :
$$\begin{aligned}\Delta &= (-5)^2-4\times1\times6\\ &= 25-24\\ &= 1\end{aligned}$$
Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation $(\star)$ admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}\\ &= \frac{5+1}{2}\\ &= \frac{6}{2}\\ &= 3\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}x_2 &= \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}\\ &= \frac{5-1}{2}\\ &= \frac{4}{2}\\ &= 2\end{aligned}$$

Exemple 4 | Équation de degré 2 à discriminant nul

L'équation $(\star) : x^2-4x+4=0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

L'équation $(\star)$ est bien une équation de degré 2.
Son discriminant Δ est donné par :
$$\begin{aligned}\Delta &= (-4)^2-4\times1\times4\\ &= 16-16\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta = 0$, l'équation $(\star)$ admet une seule solution réelle notée x_0 donnée par : $$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{(-4)}{2\times 1} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exemple 5| Équation de degré 2 à discriminant strictement négatif

L'équation $(\star)$: $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

L'équation $(\star)$ est bien une équation de degré 2.
Son discriminant Δ est donné par : $$\begin{aligned} \Delta &= 1^2 - 4\times 1\times 1 \\ &= 1-4 \\ &= -3 \end{aligned}$$
Comme $\Delta < 0$, l'équation $(\star)$ n'admet pas de solutions réelles.

Exemple 6| Cas s'y ramenant

L'équation $(\star)$: $x(x-1)(x-2) = \left(x^2-1\right)(x+1)$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

L'équation $(\star)$ est bien une équation de degré 2.

Développer les deux membres de l'équation...

On a tout d'abord que : $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)(x-2) &= x\left(x^2-2x-x+2\right) \\ &= x\left(x^2-3x+2\right) \\ &= x^3-3x^2+2x \end{aligned}$$
et que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2-1\right)(x+1) = x^3+x^2-x-1$
Par suite, il vient que : $$\begin{aligned} \left(x(x-1)(x-2) = \left(x^2-1\right)(x+1)\right) &\Leftrightarrow \left(x^3-3x^2+2x = x^3+x^2-x-1\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x^3-3x^2+2x-x^3-x^2+x+1=0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(-4x^2+3x+1=0\right) \end{aligned}$$
Ainsi, $(\star)$ se ramène bien à une équation du second degré.
Le discriminant Δ de l'équation $-4x^2+3x+1=0$ est donné par : $$\begin{aligned} \Delta &= 3^2 - 4\times(-4)\times 1 \\ &= 9+16 \\ &= 25 \end{aligned}$$
Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation $-4x^2+3x+1=0$ et donc $(\star)$ admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-4)} \\ &= \frac{-3+5}{-8} \\ &= \frac{-2}{-8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-4)} \\ &= \frac{-3-5}{-8} \\ &= \frac{-8}{-8} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Application 2| Réf. 4952

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions ? Si oui, les expliciter.

1. $(\star_1)$: $x^2+4x-5=0$
2. $(\star_2)$: $2x^2-13x+15=0$
3. $(\star_3)$: $3x^2-6x+3=0$

4. $(\star_4) :\ 3x^2 - 5x + 6 = 0$
5. $(\star_5) :\ 3x^2 - 24x + 48 = 0$
6. $(\star_6) :\ -2x^2 + x + 6 = 0$

Application 3 | Réf. 4953

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions ? Si oui, les expliciter.

1. $(\star_1) :\ x^2 - 5x + 6 = 2(x-2)(x+1)$
2. $(\star_2) :\ (x-1)(x+2) = 2x^2 + 4x - 6$
3. $(\star_3) :\ x(x-1)(x-2) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
4. $(\star_4) :\ (x-1)(x+2) - (x-3)(x+1) = x^2 - 2x + 7$