

Équations de degré 1 et de degré 2 et s'y ramenant

Version du 25-05-2022 à 20:14

Contexte



L'objet de ce document consiste à travailler votre dextérité de calcul pour la résolution d'équations se ramenant à une forme du type $ax + b = 0$ ou $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x .

1. Équations se ramenant à une forme du type $ax + b = 0$

Théorème 1

On considère l'équation d'inconnue le réel x : (\diamond) : $ax + b = 0$ où $a \neq 0$.



L'équation (\diamond) admet une unique solution notée x_0 qui vaut : $x_0 = -\frac{b}{a}$.



On pourra adopter la rédaction suivante pour sa résolution : $(ax + b = 0) \Leftrightarrow (ax = -b) \Leftrightarrow (x = -\frac{b}{a})$

Exemple 1 – Résolution directe



L'équation (\diamond) : $2x + 3 = 0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.

On résoud (\diamond) : $(2x + 3 = 0) \Leftrightarrow (2x = -3) \Leftrightarrow (x = -\frac{3}{2})$

et ainsi (\diamond) admet une unique solution notée x_0 donnée par : $x_0 = -\frac{3}{2}$.

Exemple 2 – Cas se ramenant à une équation de degré 1



L'équation (\diamond) : $(x - 1)(x + 2) = x^2 - 6x + 3$ d'inconnue le réel x , admet-elle des solutions ? Si oui, les expliciter.



Ce n'est pas une équation de degré 1.



Développer le membre de gauche de l'équation...

On résoud (\diamond) : $((x-1)(x+2) = x^2 - 6x + 3) \Leftrightarrow (x^2 + 2x - x - 2 = x^2 - 6x + 3)$
 $\Leftrightarrow (x^2 + x - 2 = x^2 - 6x + 3)$
 $\Leftrightarrow (x^2 + x - 2 - x^2 + 6x - 3 = 0)$
 $\Leftrightarrow (7x - 5 = 0)$
 $\Leftrightarrow (7x = 5)$
 $\Leftrightarrow (x = \frac{5}{7})$

et ainsi (\diamond) admet une unique solution notée x_0 donnée par : $x_0 = \frac{5}{7}$.

Application [4961] | 1| Équations se ramenant à une équation de degré 1

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions? Si oui, les expliciter.

- (1). (\star_1) : $2x(x-1) + 3x = (x-1)(2x-1)$
- (2). (\star_2) : $x^2 - 6x + 1 = (x-3)(x-4)$
- (3). (\star_3) : $3x + 1 - (x-1)(2x-3) = (2x+1)(x-1) + 2$
- (4). (\star_4) : $x(x-1) - x(x+1) = x(x-2) - x(x+2)$

2. Équations se ramenant à une forme du type $ax^2 + bx + c = 0$

Théorème 2 – Résolution d'un équation de degré 2

On considère l'équation d'inconnue le réel x : (\star) : $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$.



On appelle discriminant de l'équation (\star) le nombre $b^2 - 4 \times a \times c = \Delta$.

Si $\Delta < 0$, **alors** l'équation (\star) ne possède pas de solutions réelle.

Si $\Delta \geq 0$, **alors** l'équation (\star) possède deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.



Dans le cas où $\Delta = 0$, on a clairement $x_1 = x_2$, et on dit alors que x_1 est une racine double et on peut même retenir dans ce cas que $x_1 = -\frac{b}{2a}$.

Exemple 3 – Équation de degré 2 à discriminant strictement positif



L'équation (\star) : $x^2 - 5x + 6 = 0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions? Si oui, les expliciter.

L'équation (\star) est bien une équation de degré 2.

Son discriminant Δ est donné par : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$
 $= 25 - 24$
 $= 1$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation (\star) admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 1} & x_2 &= \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 1} \\ &= \frac{5 + 1}{2} & &= \frac{5 - 1}{2} \\ &= \frac{6}{2} & \text{et} &= \frac{4}{2} \\ &= 3 & &= 2 \end{aligned}$$

Exemple 4 – Équation de degré 2 à discriminant nul



L'équation $(\star) : x^2 - 4x + 4 = 0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions? Si oui, les expliciter.

L'équation (\star) est bien une équation de degré 2.

Son discriminant Δ est donné par :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 \\ &= 16 - 16 \\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta = 0$, l'équation (\star) admet une seule solution réelle notée x_0 donnée par :

$$\begin{aligned}x_0 &= -\frac{(-4)}{2 \times 1} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

Exemple 5 – Équation de degré 2 à discriminant strictement négatif



L'équation $(\star) : x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions? Si oui, les expliciter.

L'équation (\star) est bien une équation de degré 2.

Son discriminant Δ est donné par :

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= 1 - 4 \\ &= -3\end{aligned}$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation (\star) n'admet pas de solutions réelles.

Exemple 6 – Cas s'y ramenant



L'équation $(\star) : x(x-1)(x-2) = (x^2-1)(x+1)$ d'inconnue le réel x admet-elle des solutions? Si oui, les expliciter.



L'équation (\star) est bien une équation de degré 2.



Développer les deux membres de l'équation...

On a tout d'abord que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, x(x-1)(x-2) &= x(x^2 - 2x - x + 2) \\ &= x(x^2 - 3x + 2) \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x\end{aligned}$$

et que : $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2-1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$

Par suite, il vient que :

$$\begin{aligned}(x(x-1)(x-2) = (x^2-1)(x+1)) &\Leftrightarrow (x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 + x^2 - x - 1) \\ &\Leftrightarrow (x^3 - 3x^2 + 2x - x^3 - x^2 + x + 1 = 0) \\ &\Leftrightarrow (-4x^2 + 3x + 1 = 0)\end{aligned}$$

Ainsi, (\star) se ramène bien à une équation du second degré.

Le discriminant Δ de l'équation $-4x^2 + 3x + 1 = 0$ est donné par :

$$\begin{aligned}\Delta &= 3^2 - 4 \times (-4) \times 1 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25\end{aligned}$$

Comme $\Delta \geq 0$ et que $\Delta \neq 0$, l'équation $-4x^2 + 3x + 1 = 0$ et donc (\star) admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 données par :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times (-4)} & x_2 &= \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times (-4)} \\
 &= \frac{-3 + 5}{-8} & &= \frac{-3 - 5}{-8} \\
 &= \frac{-2}{-8} & \text{et} &= \frac{-8}{-8} \\
 &= \frac{1}{4} & &= 1
 \end{aligned}$$

Application [4952] | 2 | Résolution d'équations du degré 2

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions ? Si oui, les expliciter.

- (1). $(\star_1) : x^2 + 4x - 5 = 0$
- (2). $(\star_2) : 2x^2 - 13x + 15 = 0$
- (3). $(\star_3) : 3x^2 - 6x + 3 = 0$
- (4). $(\star_4) : 3x^2 - 5x + 6 = 0$
- (5). $(\star_5) : 3x^2 - 24x + 48 = 0$
- (6). $(\star_6) : -2x^2 + x + 6 = 0$

Application [4953] | 3 | Résolution d'équations du degré 2

Les équations suivantes d'inconnue le réel x admettent-elles des solutions ? Si oui, les expliciter.

- (1). $(\star_1) : x^2 - 5x + 6 = 2(x - 2)(x + 1)$
- (2). $(\star_2) : (x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 4x - 6$
- (3). $(\star_3) : x(x - 1)(x - 2) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
- (4). $(\star_4) : (x - 1)(x + 2) - (x - 3)(x + 1) = x^2 - 2x + 7$