Chapitre | TX04

Opérations avec $\exp$ et $\ln$

Version du 12-05-2023 à 10:39

Contexte

L'objet du document n'est pas de construire ou de définir la fonction exponentielle ou la fonction logarithme népérien, mais uniquement de manipuler les propriétés opératoires de ces dernières.

1. Du côté de la fonction logarithme népérien

Théorème 1| Relation fondamentale et formules de calculs

Pour tous réels a et b **strictement positifs** :

Relation fondamentale

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

Valeurs particulières

$$\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(\mathrm{e}) = 1$$

Lien entre fonction logarithme népérien et fonction exponentielle

Pour tout réel x, on a : $\ln(\mathrm{e}^x) = x$

Exemple 1| Illustration des propriétés opératoires

$$\begin{aligned} \ln(6) &= \ln(2 \times 3) \\ &= \ln(2) + \ln(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(30) &= \ln(2 \times 3 \times 5) \\ &= \ln(2) + \ln(3) + \ln(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{6}\right) &= -\ln(6) \\ &= -\ln(2 \times 3) \\ &= -(\ln(2) + \ln(3)) \\ &= -\ln(2) - \ln(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{12}{5}\right) &= \ln(12) - \ln(5) \\ &= \ln(4 \times 3) - \ln(5) \\ &= \ln(4) + \ln(3) - \ln(5) \\ &= \ln(2^2) + \ln(3) - \ln(5) \\ &= 2\ln(2) + \ln(3) - \ln(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(16) &= \ln(2^4) \\ &= 4\ln(2) \end{aligned}$$

$$\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\begin{aligned} \ln(48) &= \ln(3 \times 16) \\ &= \ln(3) + \ln(16) \\ &= \ln(3) + \ln(2^4) \\ &= \ln(3) + 4\ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(14\sqrt{2}) &= \ln(14) + \ln(\sqrt{2}) \\ &= \ln(2 \times 7) + \frac{1}{2}\ln(2) \\ &= \ln(2) + \ln(7) + \frac{1}{2}\ln(2) \\ &= \ln(7) + \frac{3}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

Application 1 | Réf. 4902

Exprimer chacun des nombres suivants à l'aide de $\ln(2)$.

1. $\ln(4)$
2. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
3. $\ln(6) - \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$
4. $\ln\left(2\mathrm{e}^{2}\right)$
5. $\ln\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}\right)$
6. $\ln\left(\sqrt{8\mathrm{e}^{5}}\right)$

Application 2 | Réf. 4903

Établir les égalités suivantes :

1. $\ln(16) + \ln(4) = 6\ln(2)$
2. $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \ln\left(\dfrac{9}{8}\right) = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$
3. $\ln\left(\dfrac{7}{5}\right) = -\ln\left(\dfrac{5}{7}\right)$
4. $\dfrac{\ln\left(\sqrt{8}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} = 3$

2. Du côté de la fonction exponentielle

Théorème 2 | Relation fondamentale et formules de calculs

Pour tous réels x et y :

Relation fondamentale

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{-x}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}} = \mathrm{e}^{x-y}$$

$$\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{n} = \mathrm{e}^{nx} \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

Valeurs particulières

$$\mathrm{e}^{0} = 1 \text{ et } \mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$$

Lien entre fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien

Pour tout réel $x > 0$, on a : $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$

Exemple 2 | Illustration des propriétés opératoires

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2+5} &= \mathrm{e}^{2} \times \mathrm{e}^{5} \\ \mathrm{e}^{4} \times \mathrm{e}^{-4} &= \mathrm{e}^{4+(-4)} \\ &= \mathrm{e}^{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{5} \times \mathrm{e}^{-3} &= \mathrm{e}^{5+(-3)} \\ &= \mathrm{e}^{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{e}^{2}\right)^{3} &= \mathrm{e}^{2\times 3} \\ &= \mathrm{e}^{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^{5} &= \mathrm{e}^{(-3)\times 5} \\ &= \mathrm{e}^{-15} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{15}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{5}}{\mathrm{e}^{2}} &= \mathrm{e}^{5-2} \\ &= \mathrm{e}^{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{4}}{\mathrm{e}^{6}} &= \mathrm{e}^{4-6} \\ &= \mathrm{e}^{-2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\mathrm{e}^{2} \times \mathrm{e}^{-3}\right)^{3}}{\mathrm{e}^{-4}} &= \frac{\left(\mathrm{e}^{2+(-3)}\right)^{3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(-1)\times 3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \mathrm{e}^{(-3)-(-4)} \\ &= \mathrm{e}^{1} \\ &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

Application 3 | Réf. 4904

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\mathrm{e}^{3} \times \mathrm{e}^{4}$
2. $\left(\mathrm{e}^{4}\right)^{3} \times \mathrm{e}^{4}$
3. $\left(\mathrm{e}^{5} - \mathrm{e}^{4}\right)^{2} - \left(\mathrm{e}^{5} + \mathrm{e}^{4}\right)^{2}$
4. $\mathrm{e}^{4} \times \mathrm{e}^{-4}$
5. $\dfrac{\mathrm{e}^{5} \times \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}}$
6. $\dfrac{\mathrm{e}^{6} - \mathrm{e}^{3}}{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{2}}$
7. $\left(\mathrm{e}^{3}\right)^{-2} \times \mathrm{e}^{5}$
8. $\dfrac{\mathrm{e}^{6} \times \mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-4}}$

Application 4 | Réf. 4905

L'égalité $\mathrm{e}^{5\ln(2)} \times \mathrm{e}^{7\ln(4)} = 2^{19}$ est-elle vraie ?

Application 5 | Réf. 4906

Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir les égalités suivantes :

1. $\dfrac{2 + 3\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} = 2\mathrm{e}^{-2x} + 3\mathrm{e}^{-x} + 2$
2. $(\mathrm{e}^{x} + 1)^{2} - (\mathrm{e}^{x} - 1)^{2} = 4\mathrm{e}^{x}$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} + 2}{\mathrm{e}^{3x} + 1} = \dfrac{1 + 2\mathrm{e}^{-3x}}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{(\mathrm{e}^{x} + 1)^{2}}$