TX04

Opérations avec $\exp$ et $\ln$

Version du 25-05-2022 à 19:44

Contexte

L'objet du document n'est pas de construire ou de définir la fonction exponentielle ou la fonction logarithme népérien, mais uniquement de manipuler les propriétés opératoires de ces dernières.

1 . Du côté de la fonction logarithme népérien

Théorème 1 – Relation fondamentale et formules de calculs

Pour tous réels a et b **strictement positifs** :

Relation fondamentale

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

Valeurs particulières

$$\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(\mathrm{e}) = 1$$

Lien entre fonction logarithme népérien et fonction exponentielle

Pour tout réel x, on a : $\ln(\mathrm{e}^x) = x$

Exemple 1 – Illustration des propriétés opératoires

$$\begin{aligned}\ln(6) &= \ln(2\times 3)\\ &= \ln(2)+\ln(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(30) &= \ln(2\times 3\times 5)\\ &= \ln(2)+\ln(3)+\ln(5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{6}\right) &= -\ln(6)\\ &= -\ln(2\times 3)\\ &= -(\ln(2)+\ln(3))\\ &= -\ln(2)-\ln(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{12}{5}\right) &= \ln(12)-\ln(5)\\ &= \ln(4\times 3)-\ln(5)\\ &= \ln(4)+\ln(3)-\ln(5)\\ &= \ln(2^2)+\ln(3)-\ln(5)\\ &= 2\ln(2)+\ln(3)-\ln(5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(16) &= \ln(2^4)\\ &= 4\ln(2)\end{aligned}$$

$$\ln\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\begin{aligned}\ln(48) &= \ln(3\times 16)\\ &= \ln(3)+\ln(16)\\ &= \ln(3)+\ln(2^4)\\ &= \ln(3)+4\ln(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(14\sqrt{2}\right) &= \ln(14)+\ln\left(\sqrt{2}\right)\\ &= \ln(2\times 7)+\frac{1}{2}\ln(2)\\ &= \ln(2)+\ln(7)+\frac{1}{2}\ln(2)\\ &= \ln(7)+\frac{3}{2}\ln(2)\end{aligned}$$

Application| [4902] | 1| Propriétés opératoires de $\ln$

Exprimer chacun des nombres suivants à l'aide de $\ln(2)$.

(1). $\ln(4)$

(2). $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$

(3). $\ln(6) - \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

(4). $\ln\left(2\mathrm{e}^{2}\right)$

(5). $\ln\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}\right)$

(6). $\ln\left(\sqrt{8\mathrm{e}^{5}}\right)$

Application| [4903] | 2| Propriétés opératoires de $\ln$

Établir les égalités suivantes :

(1). $\ln(16) + \ln(4) = 6\ln(2)$

(2). $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \ln\left(\dfrac{9}{8}\right) = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

(3). $\ln\left(\dfrac{7}{5}\right) = -\ln\left(\dfrac{5}{7}\right)$

(4). $\dfrac{\ln\left(\sqrt{8}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} = 3$

2. Du côté de la fonction exponentielle

Théorème 2 – Relation fondamentale et formules de calculs

Pour tous réels x et y :

Relation fondamentale

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{-x}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}} = \mathrm{e}^{x-y}$$

$(\mathrm{e}^{x})^{n} = \mathrm{e}^{nx}$ où $n \in \mathbb{Z}$

Valeurs particulières

$\mathrm{e}^{0} = 1$ et $\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$

Lien entre fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien

Pour tout réel $x > 0$, on a : $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$

Exemple 2 – Illustration des propriétés opératoires

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2+5} &= \mathrm{e}^{2} \times \mathrm{e}^{5} \\ \mathrm{e}^{4} \times \mathrm{e}^{-4} &= \mathrm{e}^{4+(-4)} \\ &= \mathrm{e}^{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{5} \times \mathrm{e}^{-3} &= \mathrm{e}^{5+(-3)} \\ &= \mathrm{e}^{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{2})^{3} &= \mathrm{e}^{2\times 3} \\ &= \mathrm{e}^{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{-3})^{5} &= \mathrm{e}^{(-3)\times 5} \\ &= \mathrm{e}^{-15} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{15}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{5}}{\mathrm{e}^{2}} &= \mathrm{e}^{5-2} \\ &= \mathrm{e}^{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{4}}{\mathrm{e}^{6}} &= \mathrm{e}^{4-6} \\ &= \mathrm{e}^{-2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\mathrm{e}^{2} \times \mathrm{e}^{-3})^{3}}{\mathrm{e}^{-4}} &= \frac{\left(\mathrm{e}^{2+(-3)}\right)^{3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^{-1})^{3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{(-1)\times 3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-4}} \\ &= \mathrm{e}^{(-3)-(-4)} \\ &= \mathrm{e}^{1} \\ &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

Application| [4904] | 3| Propriétés opératoires de $\exp$

Simplifier les expressions suivantes :

(1). $\mathrm{e}^{3} \times \mathrm{e}^{4}$

(2). $(\mathrm{e}^{4})^{3} \times \mathrm{e}^{4}$

(3). $(\mathrm{e}^{5} - \mathrm{e}^{4})^{2} - (\mathrm{e}^{5} + \mathrm{e}^{4})^{2}$

(4). $\mathrm{e}^{4} \times \mathrm{e}^{-4}$

(5). $\dfrac{\mathrm{e}^{5} \times \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}}$

(6). $\dfrac{\mathrm{e}^{6} - \mathrm{e}^{3}}{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{2}}$

(7). $(\mathrm{e}^{3})^{-2} \times \mathrm{e}^{5}$

(8). $\dfrac{\mathrm{e}^{6} \times \mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{-4}}$

Application| [4905] | 4| Propriétés opératoires de $\ln$ et $\exp$

L'égalité $\mathrm{e}^{5\ln(2)} \times \mathrm{e}^{7\ln(4)} = 2^{19}$ est-elle vraie ?

Application| [4906] | 5| Propriétés opératoires de $\exp$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir les égalités suivantes :

(1). $\dfrac{2 + 3\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} = 2\mathrm{e}^{-2x} + 3\mathrm{e}^{-x} + 2$

(2). $(\mathrm{e}^{x} + 1)^{2} - (\mathrm{e}^{x} - 1)^{2} = 4\mathrm{e}^{x}$

(3). $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} + 2}{\mathrm{e}^{3x} + 1} = \dfrac{1 + 2\mathrm{e}^{-3x}}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}$

(4). $\dfrac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{(\mathrm{e}^{x} + 1)^{2}}$