Chapitre | TX03

Calcul algébrique

Version du 12-05-2023 à 10:38

1. Manipuler les identités remarquables

Proposition 1| Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{rcl} (3+2x)^2 & = & 3^3 + 2 \times 3 \times 2x + (2x)^2 \\ & = & 9 + 12x + 2^2 \times x^2 \\ & = & 9 + 12x + 4x^2 \end{array}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{rcl} (3-2x)^2 & = & 3^3 - 2 \times 3 \times 2x + (2x)^2 \\ & = & 9 - 12x + 2^2 \times x^2 \\ & = & 9 - 12x + 4x^2 \end{array}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{array}{rcl} (2x-3)(2x+3) & = & (2x)^2 - 3^2 \\ & = & 2^2 \times x^2 - 9 \\ & = & 4x^2 - 9 \end{array}$$

Exemple 1| Identités remarquables et radicaux

Montrer que $\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ et que $\left(2\sqrt{2}-3\right)^2 = 17 - 2\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{rcl} \left(2+\sqrt{3}\right)^2 & = & 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ & = & 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ & = & 7 + 4\sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(2\sqrt{2}-3\right)^2 & = & \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 3 + 3^2 \\ & = & 2^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 - 12\sqrt{2} + 9 \\ & = & 4 \times 2 - 12\sqrt{2} + 9 \\ & = & 8 - 12\sqrt{2} + 9 \\ & = & 17 - 12\sqrt{2} \end{array}$$

Exemple 2| Développement d'expressions

Développer et réduire les expressions $A(x) = (2x+y)^2 + (2x-y)^2$ et $B(x) = (x+y)\left((x+y)^2 - x^2\right)$.

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & \left[(2x)^2 + 2 \times 2x \times y + y^2\right] + \left[(2x)^2 - 2 \times 2x \times y + y^2\right] \\ & = & \left[2^2 \times x^2 + 4xy + y^2\right] + \left[2^2 \times x^2 - 4xy + y^2\right] \\ & = & \left[4x^2 + 4xy + y^2\right] + \left[4x^2 - 4xy + y^2\right] \\ & = & 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 \\ & = & 8x^2 + 2y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} B(x) & = & (x+y)\left(x^2 + 2 \times x \times y + y^2 - x^2\right) \\ & = & (x+y)\left(2xy + y^2\right) \\ & = & x \times 2xy + x \times y^2 + y \times 2xy + y \times y^2 \\ & = & 2x^2y + xy^2 + 2xy^2 + y^3 \\ & = & 2x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{array}$$

Application 1 | Réf. 3698

x et y sont deux nombres réels. Établir les égalités suivantes.

1. $(x+y)^2+(x-y)^2=2\left(x^2+y^2\right)$
2. $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$
3. $x^4+4y^4=\left((x+y)^2+y^2\right)\left((x-y)^2+y^2\right)$

Application 2 | Réf. 3699

Démontrer que :

1. $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^3-1=(x-1)\left(1+x+x^2\right)$;
2. $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^4-1=(x-1)\left(1+x+x^2+x^3\right)$;
3. $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^6-1=(x+1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$;

Application 3 | Réf. 3701

On note p la demi-somme de trois réels a, b et c : $\quad p=\dfrac{a+b+c}{2}$

Simplifier au mieux l'expression : $\quad (p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+p^2$

Application 4 | Réf. 3702

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$
2. $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$
3. $\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2+\left(1+\sqrt{5}\right)^2$.

2. Quantité conjuguée et transformations d'expressions

Définition 1 | Quantité conjuguée

On rappelle que : $\quad \forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a+b)\,(a-b)=a^2-b^2.$

Les deux quantités $a+b$ et $a-b$ sont qualifiées de quantités conjuguées.

Illustration

$\sqrt{2}-3$ et $\sqrt{2}+3$ sont des quantités conjuguées l'une de l'autre.
$\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont des quantités conjuguées l'une de l'autre.

Exemple 3 | Quantité conjuguée et radicaux

Montrer que : $\quad \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ et que $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+3.$

On remarque que $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \times \underbrace{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}_{=1}$ et que le dénominateur de ce nouveau quotient fait intervenir l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ qui permettra « d'éliminer les radicaux ».

Un calcul direct donne :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2+\sqrt{3}} &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4-3}\\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{1}\\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

Un calcul direct donne :
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\\ &= \frac{\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{3}\times 2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \frac{2\sqrt{3}+3}{4-3}\\ &= \frac{2\sqrt{3}+3}{1}\\ &= 2\sqrt{3}+3\end{aligned}$$

Exemple 4| Quantité conjuguée et expressions algégriques

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Sur le même principe que plus haut : $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{1} \times \underbrace{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}}_{=1}$ sauf que l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ interviendra au numérateur.

Un calcul direct donne que : $\forall x \in \mathbb{R},$
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1} - x &= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\end{aligned}$$

Application 5| Réf. 1924

Pour chacune des questions ci-après, on détaillera l'ensemble des calculs effectués.

1. **a.** Calculer $\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)$.
   b. En déduire que $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \sqrt{7}+\sqrt{6}$.
   c. Peut-on généraliser ce résultat en écrivant que $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? Justifier votre réponse.
2. En s'inspirant de ce qui a été fait précédemment, montrer que :
   a. $\dfrac{4}{2-\sqrt{2}} = 4+2\sqrt{2}$;
   b. $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}$;
   c. $\dfrac{3-5\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 21-13\sqrt{3}$;

d. $\dfrac{5+\sqrt{10}}{3+\sqrt{10}} = -5+2\sqrt{10}.$

Application 6 | Réf. 4901

Montrer les égalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}.$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ 3x - \sqrt{9x^2+1} = -\dfrac{1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$