

1. Manipuler les identités remarquables

Proposition 1 – Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(3 + 2x)^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times 2x + (2x)^2 \\ &= 9 + 12x + 2^2 \times x^2 \\ &= 9 + 12x + 4x^2\end{aligned}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(3 - 2x)^2 &= 3^2 - 2 \times 3 \times 2x + (2x)^2 \\ &= 9 - 12x + 2^2 \times x^2 \\ &= 9 - 12x + 4x^2\end{aligned}$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}(2x - 3)(2x + 3) &= (2x)^2 - 3^2 \\ &= 2^2 \times x^2 - 9 \\ &= 4x^2 - 9\end{aligned}$$

Exemple 1 – Identités remarquables et radicaux



Montrer que $(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ et que $(2\sqrt{2} - 3)^2 = 17 - 2\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^2 &= 2^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ &= 7 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\sqrt{2} - 3)^2 &= (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 3 + 3^2 \\ &= 2^2 \times (\sqrt{2})^2 - 12\sqrt{2} + 9 \\ &= 4 \times 2 - 12\sqrt{2} + 9 \\ &= 8 - 12\sqrt{2} + 9 \\ &= 17 - 12\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exemple 2 – Développement d'expressions



Développer et réduire les expressions $A(x) = (2x + y)^2 + (2x - y)^2$ et $B(x) = (x + y)((x + y)^2 - x^2)$.

$$\begin{aligned}A(x) &= [(2x)^2 + 2 \times 2x \times y + y^2] + [(2x)^2 - 2 \times 2x \times y + y^2] \\ &= [2^2 \times x^2 + 4xy + y^2] + [2^2 \times x^2 - 4xy + y^2] \\ &= [4x^2 + 4xy + y^2] + [4x^2 - 4xy + y^2] \\ &= 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 \\ &= 8x^2 + 2y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B(x) &= (x + y)(x^2 + 2 \times x \times y + y^2 - x^2) \\ &= (x + y)(2xy + y^2) \\ &= x \times 2xy + x \times y^2 + y \times 2xy + y \times y^2 \\ &= 2x^2y + xy^2 + 2xy^2 + y^3 \\ &= 2x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

Application [3698] | 1 | Développements d'expressions algébriques

x et y sont deux nombres réels. Établir les égalités suivantes.

- (1). $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$
- (2). $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$
- (3). $x^4 + 4y^4 = ((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2)$

Application [3699] | 2 | Développements d'expressions algébriques

Démontrer que :

- (1). $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2)$;
- (2). $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + x^3)$;
- (3). $\forall x \in \mathbb{R}, x^6 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;

Application [3701] | 3 | Utiliser les identités remarquables

On note p la demi-somme de trois réels a , b et c : $p = \frac{a + b + c}{2}$
Simplifier au mieux l'expression : $(p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 + p^2$

Application [3702] | 4 | Identités remarquables et radicaux

Développer et simplifier les expressions suivantes :

- (1). $(\sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}})^2$
- (2). $(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^2$
- (3). $(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})^2 + (1 + \sqrt{5})^2$.

2. Quantité conjuguée et transformations d'expressions

Définition 1 – Quantité conjuguée



On rappelle que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.



Les deux quantités $a + b$ et $a - b$ sont qualifiées de quantités conjuguées.

Illustration

$\sqrt{2} - 3$ et $\sqrt{2} + 3$ sont des quantités conjuguées l'une de l'autre.
 $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont des quantités conjuguées l'une de l'autre.

Exemple 3 – Quantité conjuguée et radicaux



Montrer que : $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ et que $\frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 3$.



On remarque que $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ et que le dénominateur de ce nouveau quotient fait intervenir

l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ qui permettra « d'éliminer les radicaux ».

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 + \sqrt{3}} &= \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{2^2 - (\sqrt{3})^2}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{4 - 3}{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times 2 + \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 - 3} \\ &= \frac{2\sqrt{3} + 3}{-1} \\ &= -2\sqrt{3} - 3 \end{aligned}$$

Exemple 4 – Quantité conjuguée et expressions algébriques



Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.



Sur le même principe que plus haut : $\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{1} \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ sauf que l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ interviendra au numérateur.

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 1} - x &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{1} \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x^2 + 1 - x^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{1} \\ &= \sqrt{x^2 + 1} + x \end{aligned}$$

Application [1924] | 5 | Radicaux et quantité conjuguée

Pour chacune des questions ci-après, on détaillera l'ensemble des calculs effectués.

(1)(a). Calculer $(\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6})$.

(b). En déduire que $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$.

(c). Peut-on généraliser ce résultat en écrivant que $\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? Justifier votre réponse.

(2). En s'inspirant de ce qui a été fait précédemment, montrer que :

(a). $\frac{4}{2 - \sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2}$;

(b). $\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$;

(c). $\frac{3 - 5\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 21 - 13\sqrt{3}$;

(d). $\frac{5 + \sqrt{10}}{3 + \sqrt{10}} = -5 + 2\sqrt{10}$.

Application [4901] | 6 | Expression algébrique et quantité conjuguée

Montrer les égalités suivantes :

$$(1). \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$(2). \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x - 1} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + x - 1}}$$

$$(3). \forall x \in \mathbb{R}, 3x - \sqrt{9x^2 + 1} = -\frac{1}{3x + \sqrt{9x^2 + 1}}$$