TX02

Manipuler les puissances et les radicaux

Version du 08-08-2022 à 15:38

1. Autour des puissances

Proposition 1 – Opérations sur les puissances

Pour tous réels non nuls a et b et les entiers relatifs m et n on a :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\begin{array}{rcl} 2^4 \times 2^5 & = & 2^{4+5} \\ & = & 2^9 \\ & = & 512 \end{array}$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\begin{array}{rcl} 3^4 \times 2^4 & = & (3 \times 2)^4 \\ & = & 6^4 \\ & = & 1296 \end{array}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{4^8}{4^3} & = & 4^{8-3} \\ & = & 4^5 \\ & = & 1024 \end{array}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{16^5}{4^5} & = & \left(\frac{16}{4}\right)^5 \\ & = & 4^5 \\ & = & 1024 \end{array}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$\begin{array}{rcl} (2^4)^3 & = & 2^{4\times 3} \\ & = & 2^{12} \\ & = & 4096 \end{array}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\begin{array}{rcl} 2^{-4} & = & \frac{1}{2^4} \\ & = & \frac{1}{16} \end{array}$$

On rappelle que pour $a \neq 0$, on a $a^0 = 1$, et que pour tout n entier relatif, $1^n = 1$.

Exemple 1 – Simplification de produits

Exprimer uniquement avec des puissances de 2 et de 5 le produit suivant : $A = 4^3 \times 10^5 \times 25^4 \times 200^2$.

On pourra remarquer que $4 = 2 \times 2$, que $10 = 2 \times 5$, et que $200 = 2^3 \times 5^2$ de sorte à tout exprimer à l'aide de puissances de 2 et de 5 avant de faire opérer les propriétés de calcul précdentes.

$$\begin{array}{rcl} A & = & (2^2)^3 \times (2 \times 5)^5 \times (5^2)^4 \times (2^3 \times 5^2)^2 \\ & = & 2^{2\times 3} \times 2^5 \times 5^5 \times 5^{2\times 4} \times (2^3)^2 \times (5^2)^2 \\ & = & 2^6 \times 2^5 \times 5^5 \times 5^8 \times 2^{3\times 2} \times 5^{2\times 2} \\ & = & 2^{6+5} \times 5^{5+8} \times 2^6 \times 5^4 \\ & = & 2^{11} \times 5^{13} \times 2^6 \times 5^4 \\ & = & 2^{11+6} \times 5^{13+4} \\ & = & 2^{17} \times 5^{17} \end{array}$$

Exemple 2 – Simplification de quotients

Exprimer uniquement avec des puissances de 2 et de 5 le quotient suivant :

$$A = \frac{5^3 \times \left(10^2\right)^3 \times 2^2 \times 10^8 \times 10^6}{\left(10^4\right)^6 \times 20^5}$$

On pourra remarquer que $20 = 2 \times 10$, ce qui permettra dans un premier temps de n'avoir que des puissances de 2, de 5 et de 10, puis on se souviendra que $10 = 2 \times 5$ ce qui permettra ensuite de n'avoir que des puissances de 2 et de 5.

$$\begin{aligned}
A &\underset{20=2\times 10}{=} \frac{5^3 \times 10^{2\times 3} \times 2^2 \times 10^{8+6}}{10^{4\times 6} \times (2 \times 10)^5} \\
&= \frac{5^3 \times 10^6 \times 2^2 \times 10^{14}}{10^{24} \times 2^5 \times 10^5} \\
&= \frac{5^3 \times 2^2 \times 10^{6+14}}{2^5 \times 10^{24+5}} \\
&= \frac{5^3 \times 2^2 \times 10^{20}}{2^5 \times 10^{29}} \\
&= 5^3 \times 2^{2-5} \times 10^{20-29} \\
&= 5^3 \times 2^{-3} \times 10^{-9} \\
&\underset{10=2\times 5}{=} 5^3 \times 2^{-3} \times (2 \times 5)^{-9} \\
&= 5^3 \times 2^{-3} \times 2^{-9} \times 5^{-9} \\
&= 5^{3+(-9)} \times 2^{-3+(-9)} \\
&= 5^{-6} \times 2^{-12} \\
&= \frac{1}{5^6 \times 2^{12}}
\end{aligned}$$

Application| [3693] | 1| Simplifications de puissances

Simplifier les écritures suivantes :

(1). $a = \dfrac{8^{73} \times 3^{31}}{9^{15} \times 2^{220}}$

(2). $b = \left(\dfrac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2$

(3). $c = \dfrac{\left(3^5 \times 2^{-2}\right)^2}{\left(9^{-1} \times 2^3\right)^3}$

(4). $d = \left(\dfrac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 : \dfrac{10^2 \times 2}{5^8}$

Application| [3694] | 2| Établir une égalité

Que dire de l'égalité $12^{100} \times (1,5)^{50} \times 6^{-149} = 6$?

Application| [3695] | 3| Décomposition d'entiers

Déterminer p et q entiers relatifs tels que $2^p \times 5^q = \dfrac{1}{125\,000}$.

Application| [4895] | 4| Simplification de quotients

Exprimer le quotient ci-dessous uniquement à l'aide de puissances d'entiers appartenant à $\{2, 3, 5, 7\}$:

$$A = \frac{8 \times (7 \times 5)^5 \times \dfrac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times \left(7^{-2}\right)^2}{21^4 \times \left(2^2 \times 5^3\right)^{-2}}$$

2. Avec des radicaux

Proposition 2 – Opérations avec les radicaux

Soit a un réel positif.
Le nombre $\sqrt{a}$ est l'**unique** réel **positif** dont le **carré est égal à** a : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

Racine d'un produit et produit de racines	
$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$	⚠ $a \geq 0$ et $b \geq 0$

Racine d'un quotient et quotient de racines	
$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	⚠ $a \geq 0$ et $b > 0$

Simplification de radicaux

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a : $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$.

Exemple 3 – Illustration des propriétés

Simplifier au mieux les radicaux suivants.

$$\begin{aligned} \sqrt{147} &= \sqrt{3 \times 49} \\ &= \sqrt{3} \times \sqrt{49} \\ &= \sqrt{3} \times 7 \\ &= 7\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{625}{225}} &= \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{225}} \\ &= \frac{25}{15} \\ &= \frac{5 \times 5}{3 \times 5} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{486} &= \sqrt{6 \times 9 \times 9} \\ &= \sqrt{6 \times 9^2} \\ &= \sqrt{6} \times 9 \\ &= 9\sqrt{6} \end{aligned}$$

Dans chaque cas, on a essayé de décomposer chaque entier en produit d'entiers .

Exemple 4 – Simplifications de sommes de radicaux

Vérifier l'égalité suivante : $\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{128} = \sqrt{2}$.

On remarque que : $32 = 16 \times 2$, que $50 = 25 \times 2$ ou encore que $128 = 64 \times 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{128} &= \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{25 \times 2} - \sqrt{64 \times 2} \\ &= \sqrt{4^2 \times 2} + \sqrt{5^2 \times 2} - \sqrt{8^2 \times 2} \\ &= 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= 9\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exemple 5 – Radicaux au dénominateur

Montrer que $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ et que $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

On remarque $\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 3$ et que $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

On remarque $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2$ et que $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{3\times 2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}$$

Exemple 6 – Quantité conjuguée et radicaux

Montrer que $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$ et $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

On remarque que $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) = \underbrace{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2}_{=3-1}$

et que $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}+1} \times \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$.

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{3}+1} &= \frac{2}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\\
&= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}\\
&= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2}\\
&= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}\\
&= \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\\
&= \sqrt{3}-1
\end{aligned}$$

On remarque que $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = \underbrace{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2}_{=3-1}$

et que $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$.

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} &= \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\\
&= \frac{\left(6-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}\\
&= \frac{6\times\sqrt{3} + 6\times 1 - \sqrt{3}\times\sqrt{3} - \sqrt{3}\times 1}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^1}\\
&= \frac{6\sqrt{3} + 6 - 3 - \sqrt{3}}{3-1}\\
&= \frac{3+5\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Application| [3696] | 5| Manipuler les opérations sur les radicaux

Simplifier l'écriture de :

(1). $x = \dfrac{\sqrt{8}}{2} + \dfrac{\sqrt{50}}{4} - \sqrt{\dfrac{576}{18}}$

(2). $y = \sqrt{50} + \sqrt{32} + \sqrt{2}$

(3). $z = \dfrac{\sqrt{8,1\times 10^5}}{\sqrt{5\times 10^3}\times\sqrt{45\times 10^6}}$

Application| [3697] | 6| Simplifier une expression avec radical

Simplifier $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$.