

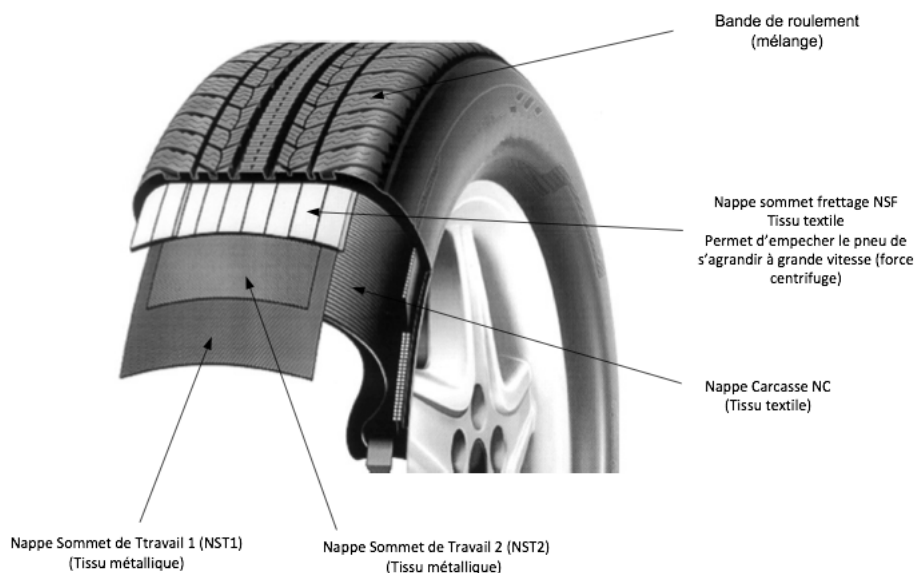
Des aires, des intégrales et des probabilités

Version du 30-08-2022 à 14:57

1. Mise en place du problème

Introduction

Un fabricant de pneumatiques souhaite modifier l'une des fibres textiles composant la nappe de sommet de frottement d'une gamme de pneus qu'il produit.



Pour cela, il met en production sa nouvelle fibre, et procède ensuite à une campagne de mesures sur une partie de sa production au cours de laquelle il s'intéresse uniquement à la force de rupture (en daN - décanewtons) de la nouvelle fibre.



Seules les fibres dont la force de rupture sera dans l'intervalle $45,2 \pm 3 \text{ daN}$ soit $[42,2; 48,2]$ pourront être utilisées lors de la fabrication du pneu.

Il obtient alors une série de 289 mesures qui sont toutes comprises dans l'intervalle de tolérance qu'il s'est donné.



Le problème qu'il rencontre est simplement le suivant : **il a dû procéder à une campagne de mesures destructrices** sur 289 fibres de sa production ! En effet, **c'est le seul moyen dont il dispose pour mesurer la force de rupture de chacune des fibres.**



Cependant, **comment exploiter ce relevé statistique pour analyser la globalité de sa production sans avoir à procéder à une nouvelle campagne de « mesures destructrices » ?**

| | | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 46,0431 | 44,7341 | 45,9010 | 44,5004 | 45,0801 | 45,6336 | 45,9235 | 45,8244 | 45,0539 | 44,3321 |
| 45,9796 | 44,4088 | 44,9024 | 43,8945 | 45,6972 | 45,6523 | 45,3662 | 45,3045 | 45,5569 | 44,0628 |
| 45,8524 | 44,5135 | 46,2077 | 44,0048 | 45,2933 | 46,0450 | 45,8487 | 45,4915 | 45,8000 | 44,9866 |
| 45,7645 | 45,9740 | 44,5434 | 44,1937 | 45,0782 | 45,6598 | 45,3662 | 45,6972 | 45,4223 | 44,5677 |
| 45,8094 | 46,1179 | 44,9548 | 43,3709 | 45,4373 | 44,9174 | 46,2675 | 45,3943 | 46,0824 | 43,9300 |
| 45,3382 | 44,8482 | 45,0053 | 44,1133 | 45,5588 | 45,5195 | 45,7832 | 45,3008 | 45,7159 | 44,8052 |
| 45,1287 | 44,5995 | 44,4630 | 44,6743 | 45,0352 | 45,9122 | 45,9590 | 45,9048 | 45,2484 | 44,8052 |
| 45,8000 | 44,5154 | 44,9141 | 43,6739 | 44,9268 | 45,4971 | 46,0450 | 45,7832 | 45,1081 | 44,6032 |
| 45,9216 | 45,2260 | 46,1610 | 43,5056 | 44,6986 | 45,6897 | 45,8000 | 45,0520 | 44,6930 | 44,0348 |
| 46,3106 | 45,1661 | 45,5401 | 43,8178 | 45,0726 | 45,7870 | 45,3662 | 45,7178 | 44,9791 | 45,2073 |
| 46,1011 | 44,4967 | 45,8337 | 43,9170 | 44,6206 | 45,5214 | 45,8618 | 45,4934 | 45,2316 | 45,2484 |
| 46,0244 | 44,9398 | 43,9487 | 43,2662 | 45,0577 | 45,4391 | 45,9496 | 46,0618 | 44,8987 | 44,3414 |
| 46,0899 | 44,9548 | 44,3097 | 44,3246 | 45,6056 | 45,4840 | 44,8146 | 45,1886 | 45,5682 | 45,0296 |
| 44,7341 | 45,0764 | 44,2872 | 44,6313 | 45,6841 | 44,8520 | 45,3531 | 46,2264 | 44,7902 | 44,9043 |
| 45,3438 | 44,6313 | 45,2016 | 44,5771 | 45,6187 | 44,9604 | 45,3662 | 45,6411 | 44,9978 | 46,1142 |
| 45,0016 | 45,9515 | 45,6654 | 44,3714 | 45,0539 | 45,3905 | 45,4560 | 45,4466 | 44,4088 | 45,4597 |
| 45,1755 | 45,2035 | 44,7809 | 43,7449 | 46,0394 | 45,3344 | 44,6182 | 45,6804 | 44,6930 | 44,9866 |
| 45,2596 | 44,9081 | 44,5284 | 44,2442 | 46,0618 | 44,8038 | 45,2166 | 45,2297 | 45,0053 | 45,4036 |
| 45,6336 | 44,9922 | 44,5995 | 44,1170 | 45,3886 | 45,4260 | 44,9268 | 45,8861 | 44,2573 | 45,4934 |
| 45,3512 | 44,8333 | 43,9974 | 44,0890 | 45,4279 | 46,0656 | 45,6000 | 45,0614 | 44,9230 | |
| 44,9118 | 43,7262 | 44,2928 | 45,5569 | 45,8374 | 44,3134 | 46,4284 | 45,1325 | 45,2858 | |
| 44,4686 | 44,3190 | 44,0011 | 45,4354 | 45,3849 | 44,8987 | 44,9870 | 45,5962 | 45,5102 | |
| 45,0483 | 44,4742 | 44,6300 | 45,1175 | 45,1661 | 44,7398 | 45,8767 | 44,9459 | 44,6561 | |
| 45,2577 | 44,0441 | 46,0057 | 45,1642 | 45,3849 | 43,7393 | 46,0862 | 45,4167 | 45,1194 | |
| 44,7304 | 43,6832 | 45,2166 | 45,8019 | 45,1699 | 44,8669 | 46,3797 | 45,0988 | 45,5495 | |
| 44,5023 | 44,0422 | 46,3667 | 45,4560 | 45,1474 | 44,7622 | 45,6785 | 45,2484 | 45,6561 | |
| 44,8707 | 44,6837 | 45,5102 | 45,6056 | 45,3288 | 44,5023 | 46,2208 | 44,3040 | 46,5761 | |
| 44,6986 | 45,7271 | 45,4036 | 45,8954 | 45,8524 | 44,3564 | 45,4821 | 44,6174 | 46,4190 | |
| 45,0801 | 45,2540 | 45,4522 | 45,4130 | 44,8337 | 44,0516 | 44,8300 | 44,4780 | 44,6515 | |
| 44,7117 | 46,0151 | 46,0207 | 45,3943 | 44,8763 | 43,9637 | 46,2825 | 45,5401 | 44,8019 | |

On peut toujours exploiter le relevé statistique directement, à l'aide d'un tableur par exemple.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|--------------------|------------|----|------|---|------------|
| 1 | Moyenne | 45,1508713 | | | | |
| 2 | Ecart-type | 0,65322836 | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | 1° quartile | 44,705155 | | | | |
| 5 | Médiane | 45,20164 | | | | |
| 6 | 2° quartile | 45,63735 | | | | |
| 7 | | | | | | |
| 8 | % de mesures entre | 43,5 | et | 45,6 | : | 72,6643599 |

Par exemple si l'on souhaite connaître le pourcentage de fibres dont la force de rupture se situe dans l'intervalle $[43,5; 45,6]$, on pourrait s'apercevoir qu'alors 72,66% des fibres fabriquées répondent au critère retenu.

□

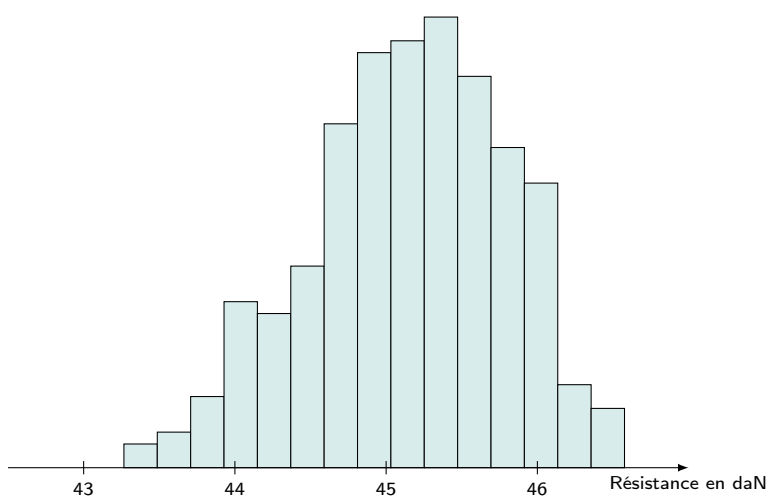
2. Visualisation de la production et obtention d'un modèle

Introduction – Représentation par un histogramme normalisé

Il s'agit d'utiliser ce relevé statistique pour construire un « **modèle théorique** » que l'on pourra utiliser pour analyser la production. Dans un premier temps, il peut être intéressant de disposer d'un moyen de « visualiser » sa production. La **construction d'un histogramme** (normalisé) d'un regroupement par classes de ce relevé statistique est une première solution.

On rappelle que, pour ce type de graphique, l'aire de chaque rectangle de l'histogramme est proportionnelle à la fréquence (ou l'effectif) de la classe, et que dans le cas d'un histogramme normalisé, elle est égale à la fréquence de la classe.

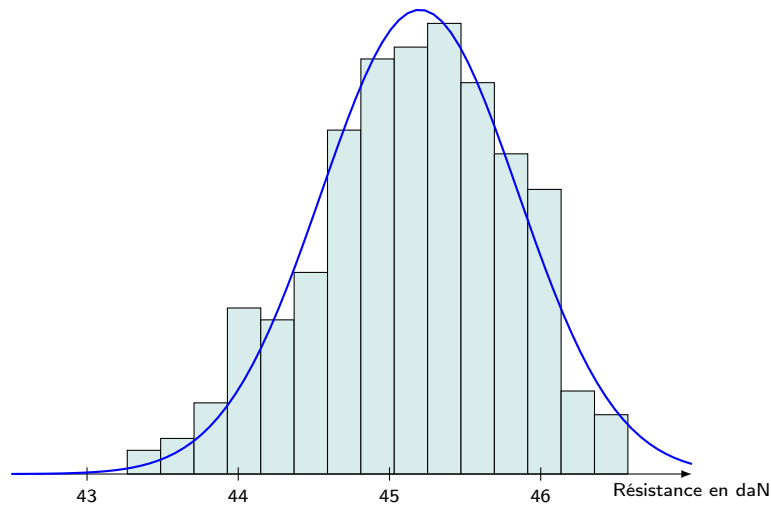
□



Introduction – Obtention d'un modèle



On peut alors essayer de faire passer au plus près de l'histogramme une fonction f :



3. Exploitation du modèle

Introduction – Question posée et réponse

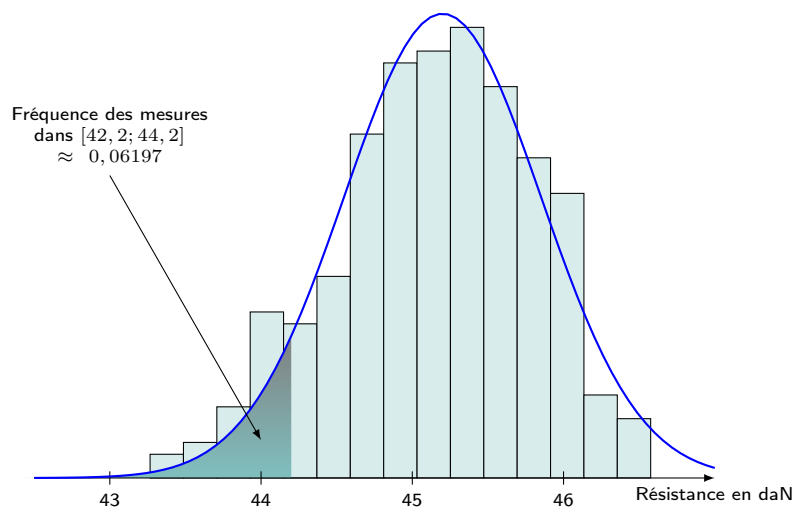


Comment utiliser ce modèle pour répondre à la question : « quel est le pourcentage de valeurs comprises dans l'intervalle $[42,2; 44,2]$ » ?



Puisque l'aire de chaque rectangle est égale à la fréquence de la classe, compte-tenu du choix de la fonction f qui « colle » à l'histogramme, une valeur approchée du pourcentage (exprimé en

fréquence) recherché sera simplement $\int_{42,2}^{44,2} f(x) dx$.



4. Vers les probabilités

Introduction – Formalisation succincte

On prélève une fibre au hasard dans l'ensemble de la production et on note R la variable aléatoire égale à la force de rupture de la fibre.

Compte-tenu du choix de la fonction f , on peut dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\mathbb{P}(R \leq x) \approx \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



En d'autres termes, la fonction de répartition de la variable aléatoire R est donc donnée par une fonction f , que l'on appelle densité de la variable aléatoire.

On pourra encore écrire par exemple que $\mathbb{P}(a \leq R \leq b) \approx \int_a^b f(t) dt$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$.

On peut ainsi définir une variable aléatoire R pour étudier cette production à l'aide de sa fonction de répartition, qui est elle-même donnée par une fonction f , appelée densité de la variable aléatoire.



Cette étude soulève néanmoins au moins un point important : quelles conditions doit-on imposer à F et à f ?

□