PR08

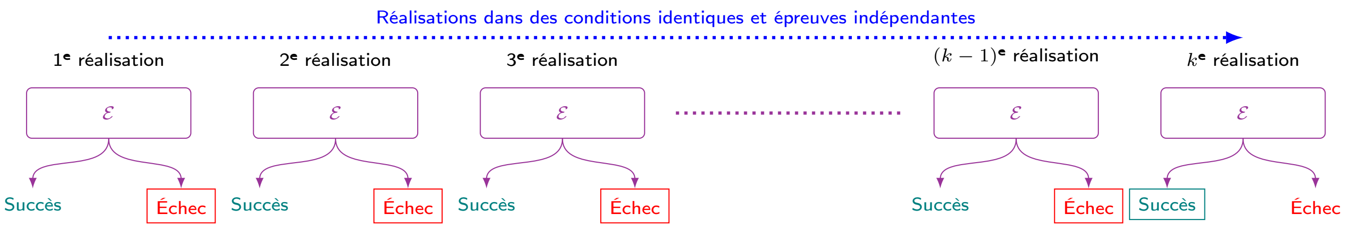
Lois discrètes usuelles

Version du 30-08-2022 à 14:53

1 . Loi géométrique

Introduction – Échecs et enfin succès

On suppose disposer d'une épreuve $\mathcal{E}$ de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$ [a] que l'on répète dans des conditions identiques, c'est à dire que p est constant, et que les résultats des épreuves sont indépendants les uns des autres, jusqu'à obtenir l'événement succès.



On définit une variable aléatoire X sur cette expérience aléatoire, comme étant le nombre d'épreuves effectuées pour obtenir le premier succès. On dit alors que X est le

et l'on parle de « loi du premier succès ».

Loi de X

Le support de X est naturellement $\mathbb{N}^*$, étant entendu qu'il est nécessaire de réaliser au moins une fois l'épreuve $\mathcal{E}$ et qu'il est *a priori* possible que l'événement succès ne se réalise jamais. Ainsi, $X(\Omega) =$.
Soit $k \in \mathbb{N}^* = X(\Omega)$.

L'événement $[X = k]$ se réalise lorsque les premières épreuves ont conduit à un échec, et lorsque la épreuve à un succès.

Ainsi, par indépendances des k épreuves réalisées, on a : $\mathbb{P}([X = k]) =$.

$=$

Utilisation d'une indicatrice pour l'obtention de la loi de X

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire de Bernoulli X_i de paramètre p, indicatrice de l'événement succès pour la i^{e} épreuve : $\begin{cases} [X_i = 0] = \text{« La } i^{\text{e}} \text{ épreuve a donné un échec »} \\ [X_i = 1] = \text{« La } i^{\text{e}} \text{ épreuve a donné un succès »} \end{cases}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[X = k] =$
et par indépendance :

$\mathbb{P}([X = k]) =$

□

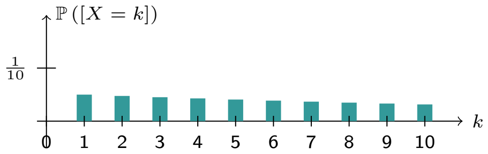
a. on comprendra que si $p = 0$ ou si$p = 1$ ce qui suit n'a pas vraiment d'intérêt...

Définition 1 – Loi géométrique

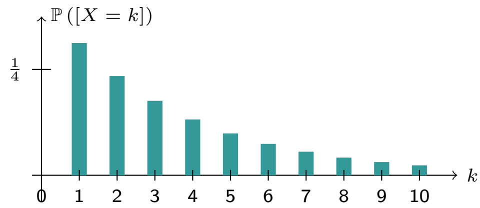
Soit $p \in]0;1[$.
On dit qu'un variable aléatoire réelle X suit la loi géométrique de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ lorsque :

$$X(\Omega) = \qquad \text{et : } \quad \forall k \in \underbrace{\mathbb{N}^*}_{=X(\Omega)}, \ \mathbb{P}([X=k]) = \qquad .$$

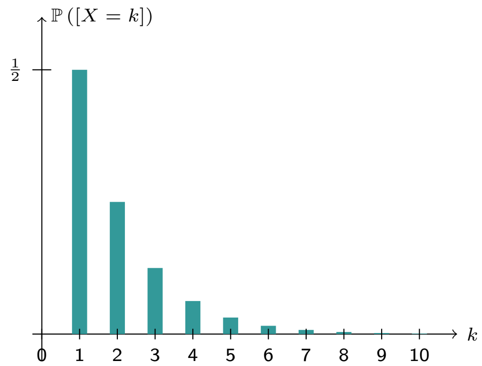
Visualisation



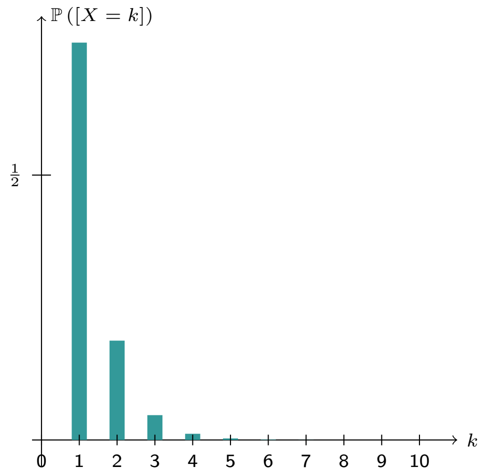
Loi $\mathcal{G}(0{,}05)$



Loi $\mathcal{G}(0{,}25)$



Loi $\mathcal{G}(0{,}5)$



Loi $\mathcal{G}(0{,}75)$

$\square$

- Une telle variable aléatoire est une variable aléatoire discrète.
- On remarque que tout a du sens, puisque en particulier :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) &= p \times \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} \\
&= p \times \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^{i} \\
&= p \times \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Théorème 1 – Espérance et variance d'une loi géométrique

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance, et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \qquad \text{et } \mathbb{V}(X) =$$

□

Éléments de preuve:

On rappelle que pour tout $x \in]-1;1[$, on a : $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, $\quad \dfrac{1}{1-x} =$ $\quad$ et $\dfrac{2}{(1-x)^3} =$

Théorème 2 – Propriété caractéristique des lois géométriques

Soit X un variable aléatoire réelle.

$$\left(\begin{array}{c} X \text{ suit une} \\ \text{loi géométrique} \end{array}\right) \Leftrightarrow \quad (\star) : \left\{\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \mathbb{N}^* \\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X > j]) & \neq & 0 \\ \forall (j,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, & = & \end{array}\right.$$

La loi est dite « » car la connaissance du résultat des k premières réalisations .

□

Éléments de preuve:

Supposons que X suive une loi géométrique de paramètre p : on a directement que :

Supposons que X est un variable aléatoire qui vérifie $(\star)$: On commence par remarquer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \, [X > k] =$$

Cette union étant disjointe, on a donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = k]) =$.
Par ailleurs, d'après $(\star)$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X > 1]) =$
Or $\mathbb{P}([X > 1]) =$ et on pose alors $p =$.

Par ailleurs, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k+1]) =$

$=$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathbb{P}([X > k+1])}{\mathbb{P}([X > k])} =$.

Par conséquent, la suite de terme général $\mathbb{P}([X > k])$ est une suite , et on en déduit que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X > k]) =$

$=$

$=$

Finalement, il vient : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = k]) =$

$=$

$=$

ce qui correspond bien à l'expression d'une loi géométrique.

2. Loi de Poisson

Introduction – Vers la loi de Poisson

On considère un grand nombre d'atomes instables, par exemple $n \approx 6,023 \times 10^{23}$ qui se désintègrent rarement, autrement dit, il y a peu de désintégrations pendant une unité de temps.

Cette faible modification du nombre d'atomes fait qu'on peut supposer également que le nombre total d'atomes ne change pas durant l'expérience.

On suppose enfin que le nombre de désintégrations observées durant un laps de temps Δt est proportionnel à cette durée, donc de la forme $\alpha \times \Delta t$.

On appelle X le nombre de désintégrations observées durant un laps de temps T donné et on voudrait déterminer la loi de X.

On suppose pour cela que la durée T est divisée en intervalles de durée $\Delta T = \dfrac{T}{n}$ suffisamment courts pour que la probabilité d'observer deux désintégrations durant cet intervalle est négligeable.

La probabilité d'observer une désintégration durant ΔT est alors égale à $p_n = \alpha \times \Delta T = \alpha \times \dfrac{T}{n}$.
L'observation sur la durée totale se ramène donc à une succession dépreuves de Bernoulli, chacune avec une probabilité de succès égale à p_n, et X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p_n)$.

On peut montrer [a] qu'en prenant n « très grand » et p_n « petit », on a alors $\mathbb{P}([X = k]) \approx \mathrm{e}^{-\alpha T} \times \dfrac{(\alpha T)^k}{k!}$. □

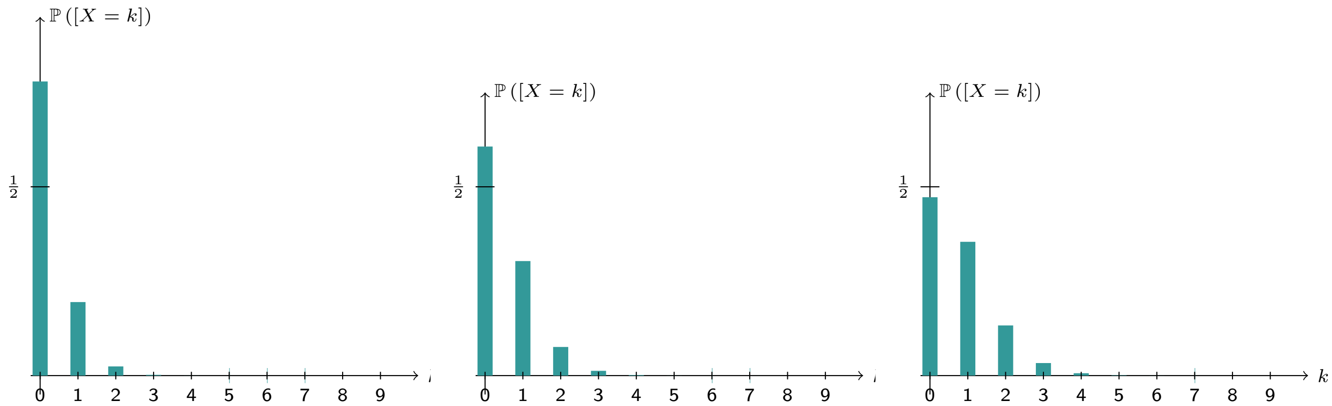
a. voir plus loin

Définition 2 – Loi de Poisson

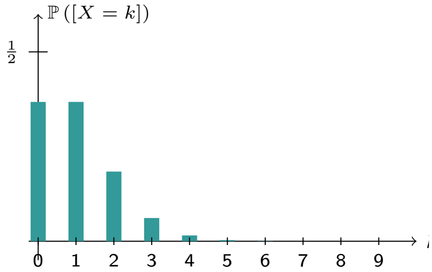
Soit $\lambda > 0$.
On dit qu'un variable aléatoire réelle X suit la loi de Poisson de paramètre λ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ lorsque :

$$X(\Omega) = \qquad \text{et :} \quad \forall k \in \underbrace{\mathbb{N}}_{=X(\Omega)}, \ \mathbb{P}([X = k]) = \qquad .$$

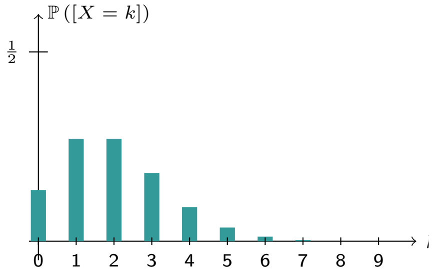
Visualisation



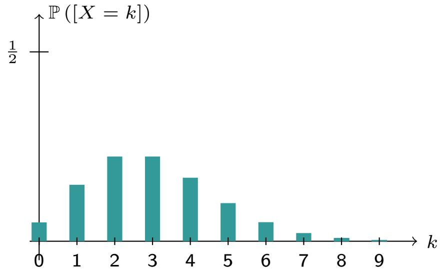
Loi $\mathcal{P}(0.25)$ — Loi $\mathcal{P}(0.5)$ — Loi $\mathcal{P}(0.75)$



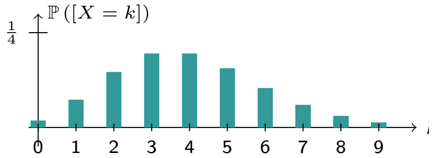
Loi $\mathcal{P}(1)$



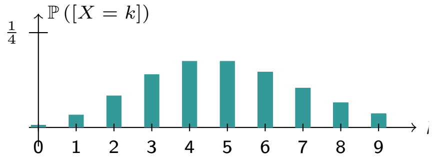
Loi $\mathcal{P}(2)$



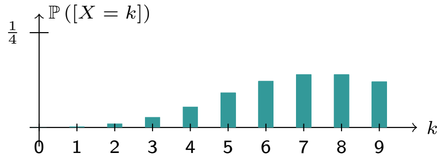
Loi $\mathcal{P}(3)$



Loi $\mathcal{P}(4)$



Loi $\mathcal{P}(5)$



Loi $\mathcal{P}(8)$

Situations pouvant relever d'une loi de Poisson

La loi de Poisson est appelée « loi des événements rares ».

On peut parler de loi de Poisson pour décrire des événements d'un certain type se produisant dans une période de temps postérieure à une origine donnée, les réalisations de l'un de ces événements dan sun intervalle de temps donné $[t; t+h]$ étant, en moyenne, en nombre proportionnel à h et indépendant de t.
Par exemple, elle permet de modéliser des situations telles :

- le nombre de connexions à un serveur web durant un intervalle de temps T ;
- le nombre de clients se présentant à une caisse de supermarché durant un temps T ;
- le nombre de coquilles typographiques dans un texte.

$\square$

- Une telle variable aléatoire est une variable aléatoire discrète.
- On remarque que tout a du sens, puisque en particulier :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) &= \mathrm{e}^{-\lambda} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\lambda} \\ &= 1\end{aligned}$$

Théorème 3 – Espérance et variance d'une loi de Poisson

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance, et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \text{ et } \mathbb{V}(X) = \lambda$$

$\square$

Éléments de preuve:

3 . Lien entre loi Binomiale et loi de Poisson

Théorème 4 – Approximation d'une loi Binomiale par une loi de Poison

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels appartenant à $]0;1[$ telle que $n \times p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ avec $\lambda > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n;\, p_n)$.

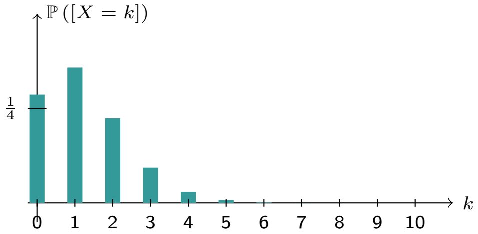
Alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Loi de Bernoulli et loi de Poisson

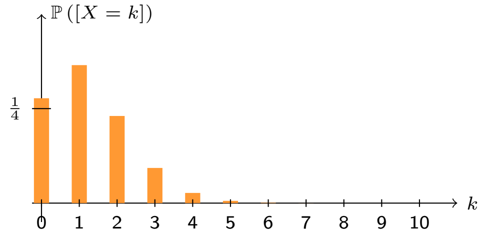
Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p,

alors la variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit approximativement, pour des « grandes » valeurs de n et des valeurs de p « petites », la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mathbb{E}(S_n))$.

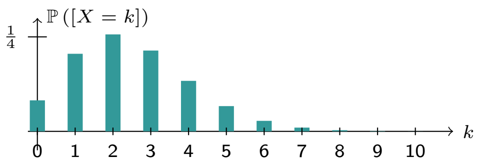
Visualisation de l'approximation



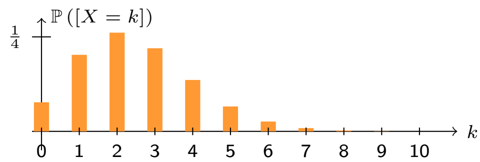
Loi $\mathcal{P}(1{,}25)$



Loi $\mathcal{B}(25;\, 0{,}05)$



Loi $\mathcal{P}(2{,}5)$



Loi $\mathcal{B}(50;\, 0{,}05)$

$\square$

Éléments de preuve:

La condition $n \times p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ peut s'écrire : $p_n = \dfrac{\lambda}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On a donc :
$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = k]) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \times \frac{1}{n^k}\left(\lambda + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-k}\end{aligned}$$

Or on a :

- $\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$
- $\dfrac{\left(\lambda + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\lambda^k}{k!}$
- On a : $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$.
  Comme $(n-k) \times \ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-k) \times \left(-\dfrac{\lambda}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda$, on en déduit par composition des limites que $\left(1 - \dfrac{\lambda}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$.

ce qui assure le ésultat attendu.