PR07

Variables aléatoires discrètes

Version du 27-08-2022 à 16:33

Contexte

Dans tout ce qui suit, on fait référence à une expérience aléatoire et à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ associé et l'univers Ω est supposé dénombrable avec $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

□

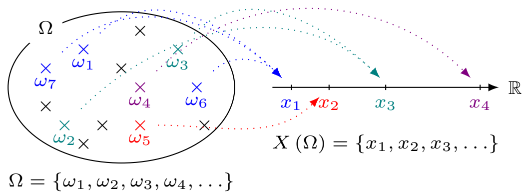
1. Notion de variables aléatoires discrètes

Définition 1 – Variable aléatoire réelle discrète

On considère une application $X : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array} \right.$

L'ensemble des valeurs prises par X est appelé le support de X et on a : $X(\Omega) =$
$=$

qui peut être fini ou dénombrable.



On dira alors que X est une variable aléatoire réelle discrète sur Ω lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{E}$, c'est à dire est un événement.

On notera alors :

$$[X = x] =$$
$$=$$

Terminologie

Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on dira de plus que X est à support fini, et de façon plus générale, dès lors que $X(\Omega)$ est , on dira que X est une variable aléatoire .

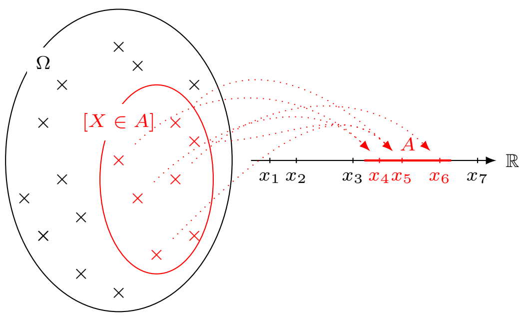
Événements associés à une variable aléatoire

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on définit l'évévement $[X \in A]$ par :

$$[X \in A] =$$

En particulier pour $A = [a;b]$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$[X \in [a;b]] =$$
$$=$$
$$[X \in]-\infty;b]] =$$
$$=$$



□

Exemple 1 – Manipuler les événements d'une variable aléatoire discrète

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré jusqu'à obtenir la face numérotée « six », et on désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce premier « six ».

L'univers Ω associé à cet expérience est délicat à expliciter mais on peut dire que $Y(\Omega) =$

Par suite, Y est une variable aléatoire à support dénombrable et est une variable aléatoire réelle discrète.
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_k l'événement « on a obtenu la face numérotée « six » au k^{e} lancer ».

$[Y = 3] =$ $\qquad$ $[Y \leq 3] =$ $\qquad$ $[Y \geq 3] =$

2. Loi d'une variable aléatoire discrète

Contexte

Dans tout ce qui suit, X désigne une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ où l'on notera : $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ où I est une partie finie ou non de $\mathbb{N}$.

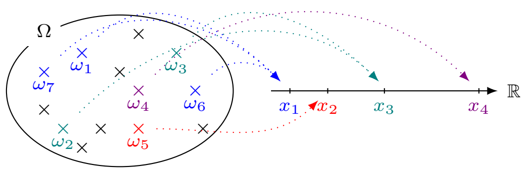
Théorème 1 – Système complet d'événements d'une variable aléatoire discrète

La famille d'événements est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

On a notamment que : $=$

Écrit de façon plus générale, la famille $([X = x],\ x \in X(\Omega))$ est un système complet d'événements .

Illustration



On a ici $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \ldots\}$ et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\}$ avec dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \ldots\} \\
&= \{\underbrace{\omega_1, \omega_6, \omega_7,}_{=[X=x_1]}\ \underbrace{\omega_5}_{=[X=x_2]},\ \underbrace{\omega_2, \omega_3}_{=[X=x_3]},\ \underbrace{\omega_4}_{[X=x_4]}, \ldots\} \\
&= \{[X = x_1], [X = x_2], [X = x_3], [X = x_4], \ldots\}
\end{aligned}$$

Définition 2 – Loi d'une variable aléatoire

Probabilité sur $X(\Omega)$

En posant pour tout partie A de $\mathbb{R}$, on définit une **probabilité sur l'ensemble des valeurs prises par** X, c'est à dire $X(\Omega)$.

On dit alors que $\mathbb{P}_X$ est **la loi de probabilité de** X ou **loi** ou de **distribution**.

Loi de X à partir de $X(\Omega)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}([X = x])$ est ainsi la probabilité que X prenne la valeur x.

Pour X variable aléatoire discrète, on peut définir $\mathbb{P}_X$ par la donnée des $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}([X = x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

La loi P_X de X est en fait la probabilité définie sur $X(\Omega)$ par $P_X : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \end{array} \right.$.

Cas général

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x]) = 1$$

Pour $X(\Omega) = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = x_n]) = 1$$

Pour $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$

$$\sum_{\substack{n=0 \\ (\text{ ou } 1)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$$

Obtention de la loi de probabilité de X

Déterminer la loi de probabilité de la X revient à déterminer l'ensemble des couples (x_i, p_i) où $\left\{ \begin{array}{l} x_i \in X(\Omega) \\ p_i = \mathbb{P}([X = x_i]) \end{array} \right.$.

Étape 1 : on détermine le support de X, c'est à dire les valeurs x_i prises par X pour obtenir $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Étape 2 : on détermine toutes les probabilités $\mathbb{P}([X = x_i]) = p_i$

□

Application| [4312] **| 1| Lancers successifs de dés**

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré jusqu'à obtenir la face numérotée « six », et on désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce premier « six ».
Déterminer la loi de Y.

□

Théorème 2 – Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire réelle discrète

Soit $\{(x_i, p_i)\,,\, i \in I\} \subset \mathbb{R} \times [0;1]$ où $I = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou une de leurs parties.

Si on a , alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle discrète X définie sur Ω tels que $\{(x_i, p_i)\,,\, i \in I\}$ est la loi de X.

□

Application| [4313] | 2| Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{E})\,\mathbb{P}$, un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
Quelle valeur donner à $\mathbb{P}([X = 0])$ pour que la relation suivante définisse bien une loi de probabilité pour la variable aléatoire X ?

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = n]) = \frac{4}{n}\mathbb{P}([X = n - 1])$$

□

3. Fonction de répartition

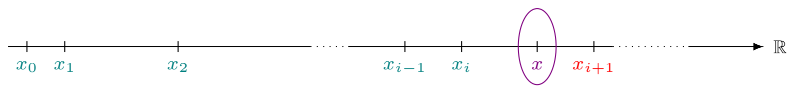
Définition 3 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

On appelle fonction de répartition de X l'application $F_X : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F_X(x) = \end{array} \right.$.

Fonction de répartition et cumul de probabilités | Interprétation

En supposant que $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) =$

$F_X(x)$ s'interprête comme étant le des probabilités des événements $[X = x_i]$ avec $x_i \leq x$.



On remarquera par ailleurs que l'on a :

$$1 = \overbrace{\underbrace{\mathbb{P}([X = x_0]) + \mathbb{P}([X = x_1]) + \ldots + \mathbb{P}([X = x_i])}_{=\mathbb{P}([X \leq x]) \text{ pour tout } x \in [x_i ; x_{i+1}[} + \mathbb{P}([X = x_{i+1}]) + \mathbb{P}([X = x_{i+2}]) + \ldots\ldots}^{\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}([X = x_i])}$$

et de cette écriture on en déduit notamment que F_X est une fonction constante[a] par morceaux. □

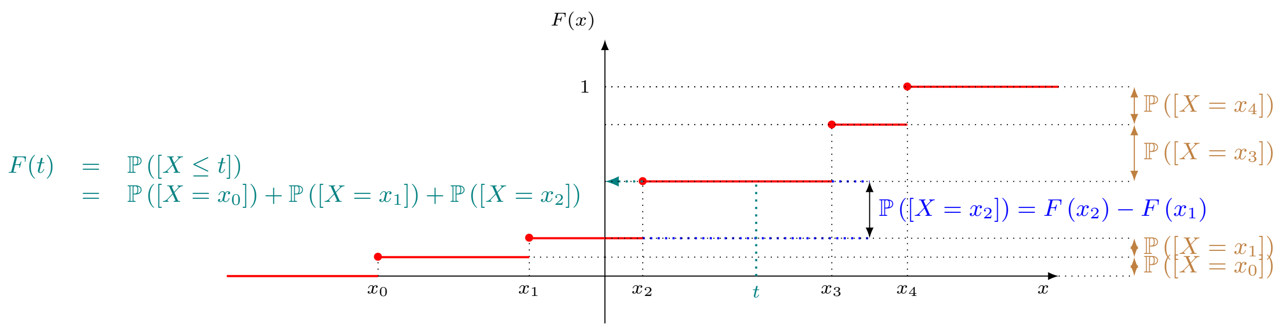
a. on parle plutôt de fonction en escaliers

Proposition 1 – Propriétés générales d'une fonction de répartition

Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs rélles, alors :

F est sur $\mathbb{R}$;	F est en tout réel ;	$F(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow}$ et $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow}$	Ces propriétés sont caractéristiques d'une fonction de répartition.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire à support fini où $X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$



La fonction de répartition présente des points de discontinuité en chaque valeur prise par X.

□

Théorème 3 – Lien entre fonction de répartition et loi de probabilité

On suppose que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ où les éléments de la suite $(x_i)_{i\in I}$ sont rangés par ordre strictement croissant. Par hypothèse, pour tout $i \in I$ tel que $i-1 \in I$, on a donc $x_{i-1} < x_i$ et ainsi : .

Décomposition d'événement

$$[X \leq x_i] \underset{\substack{\text{union}\\ \text{disjointe}}}{=} \qquad \cup \qquad$$

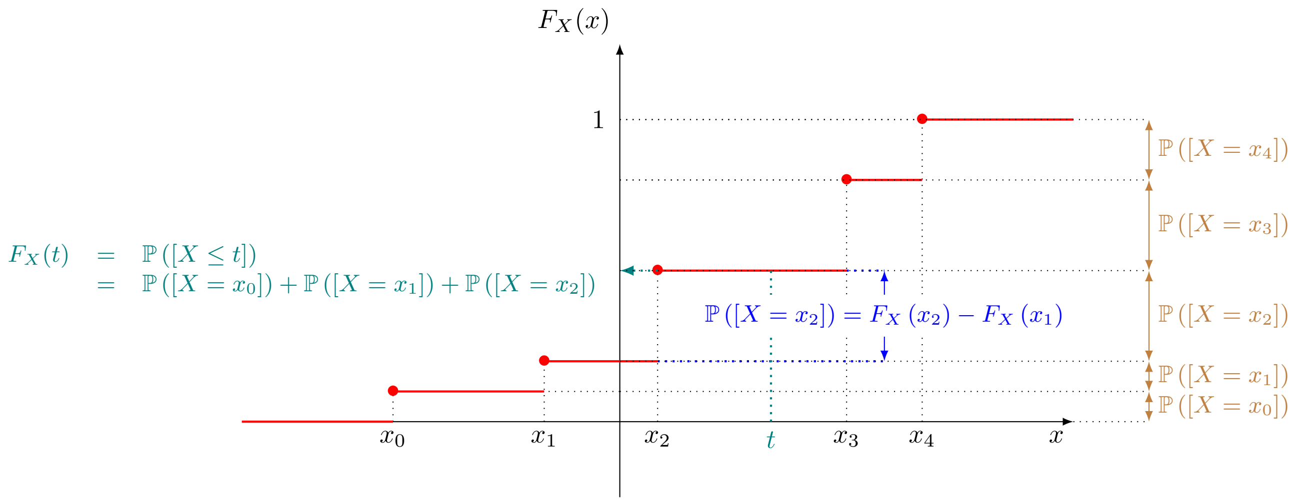
Décomposition de probabilités

$$\mathbb{P}([X \leq x_i]) \underset{\substack{\text{union}\\ \text{disjointe}}}{=} \qquad + \qquad$$

Écriture avec la fonction de répartition

$$\mathbb{P}([X = x_i]) \quad = \qquad - \qquad$$

Illustration pour $X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$



□

Application| [4314] | 3| Loi du maximum lors d'un tirage

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remise. On note alors X_1 le numéro de la première boule et X_2 le numéro de la deuxième boule. Soit alors Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus. Déterminer la loi de Y.

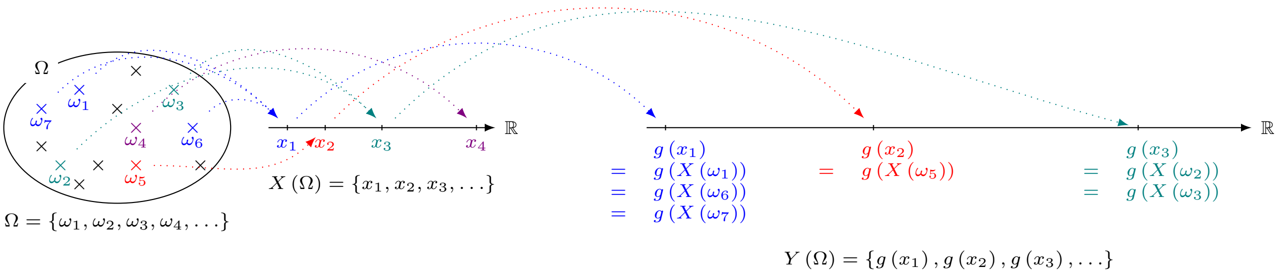
□

4. Image d'une variable aléatoire par une application

Définition 4 – Image d'une variable aléatoire par une application

Soient X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, et $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$.
On note alors $g(X)$ l'application définie par : $g(X) : \left| \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & g(X)(\omega) = \end{array} \right.$

L'application $Y =$ est une variable aléatoire réelle discrète appelée de X par g, définie sur Ω telle que $Y(\Omega) =$.



□

Théorème 4 – Loi de l'image d'une variable aléatoire | Mêmes hypothèses sur X et g

La loi de la variable aléatoire $Y = g(X)$ image de X par g est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([Y = y]) =$$

□

Application| [3512] | 4| Image d'une variable aléatoire

Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([X=-1]) = \frac{p}{2}, \quad \mathbb{P}([X=0]) = 1-p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X=1]) = \frac{p}{2}.$$

Déterminer la loi de $Y = 2X+1$ et $Z = X^2$.

□

5. Espérance d'une variable aléatoire

Définition 5 – Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$.

X à support fini

On suppose que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.

On définit l'espérance de la variable aléatoire X comme étant le réel $\mathbb{E}(X)$ défini par :

$$\mathbb{E}(X) =$$

Il s'agit ici d'une somme finie

Existence d'une espérance

Une variable aléatoire à support fini possède toujours une espérance. En effet, il s'agit de faire une somme finie de valeurs.

X à support dénombrable

On suppose que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$.

Si la série numérique est

,

alors on dira que X admet une espérance notée $\mathbb{E}(X)$, et on définit cette dernière comme étant la de la série numérique :

$$\mathbb{E}(X) =$$

Il s'agit ici de la somme d'une série

Existence d'une espérance

Une variable aléatoire discrète NE possède PAS toujours une espérance. En effet, il s'agit de faire une somme infinie de valeurs, autrement dit, il y a des problèmes de convergence de séries numériques derrière la notion.

Dans un cadre plus général et on écrirait dès lors que tout a du sens :

$$\mathbb{E}(X) =$$

On parle aussi de moment d'ordre 1 pour désigner l'espérance d'une variable aléatoire.

Expression pour $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$

Sous réserve que l'on ait établi au préalable l'existence de l'espérance : $\mathbb{E}(X) =$

□

Application| [4315] | 5| Lancers successifs de dés

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré jusqu'à obtenir la face numérotée « six », et on désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir ce premier « six ».

(1). Déterminer la loi de Y.

(2). Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

□

Proposition 2 – Positivité et croissance de l'espérance

Pour X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un même espace proabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$:

Si pour tout $\omega \in \Omega$, ,
alors .

Si X est , au sens où $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$,
alors on a .

Si $X \leq Y$ au sens où $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors .

□

6. Théorème du transfert et linéarité de l'espérance

Théorème 5 – Théorème de transfert

Soient X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_i, \, i \in I\}$, et $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{c} \text{La variable aléatoire } Y = g(X) \\ \text{admet une espérance} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La série numérique} \\ \\ \text{est} \end{array} \right)$$

et dans ce cas l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de $Y = g(X)$ est donnée par : $\mathbb{E}(g(X)) =$

Écriture du théorème du transfert pour X^k et $\dfrac{1}{X}$ avec X variable aléatoire discrète

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\left(\begin{array}{c} \text{La variable aléatoire } Y = X^k \\ \text{admet une espérance} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La série numérique} \\ \\ \text{est absolument convergente} \end{array} \right)$$

Expression dans le cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$

Sous réserve d'avoir établi l'existence de l'espérance, on a donc : $\mathbb{E}\left(X^k\right) =$

On suppose que $0 \notin X(\Omega)$.

$$\left(\begin{array}{c} \text{La variable aléatoire } Y = \dfrac{1}{X} \\ \text{admet une espérance} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La série numérique} \\ \\ \text{est absolument convergente} \end{array} \right)$$

Expression dans le cas où $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Sous réserve d'avoir établi l'existence de l'espérance, on a donc : $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) =$

Illustration

On suppose que X est telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \, \mathbb{P}([X = n]) & = & \dfrac{1}{\mathrm{e} \times n!} \end{array} \right.$$

La variable aléatoire X^2 admettra une espérance uniquement si la série numérique

est absolument convergente.

On aura alors que : $\mathbb{E}\left(X^2\right) =$

□

Définition 6 – Moment d'ordre k où $k \in \mathbb{N}$

On appelle moment d'ordre k de X l'espérance de la variable aléatoire finie X^k, c'est à dire $\mathbb{E}\left(X^k\right)$ lorsque cette dernière existe.

□

Théorème 6 – Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes ,
alors : et où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Coin des astuces | Application au calcul de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

Lien entre X, X^2 et $X(X-1)$

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}\left(X(X-1)\right) + \mathbb{E}\left(X\right)$$

Éléments de preuve:

Cas d'utilisation

Transformation utile lorsqu'il est plus facile de travailler sur la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x(x-1) \times \mathbb{P}\left([X = x]\right)$ donnant $\mathbb{E}\left(X(X-1)\right)$ que sur $\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}\left([X = x]\right)$ donnant $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.

☐

Application| [4316] | 6| Lancers successifs de dés

Soit X la variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left([X = n]\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X^2.

☐

Proposition 3 – Variable centrée

Une variable aléatoire réelle discrète X est dite **centrée** lorsqu'elle admet une espérance et que .
Si X est une variable aléatoire discrète admettant une espérance, alors est une **variable centrée**.

☐

7 . Variance et écart-type

Théorème 7 – Moment d'ordre 2 et espérance

Soit X une variable aléatoire réelle .

Moment d'ordre 2 et espérance

Si la variable aléatoire une espérance, c'est à dire existe,

alors la variable aléatoire une espérance, c'est à dire existe.

Lien entre $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbb{E}(X)$

$$(\mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}\left(X^2\right)$$

□

Éléments de preuve:

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x^2| \begin{cases} \geq x \text{ si } x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ < x \text{ si } x \in]-1;1[\end{cases}$

Ainsi, pour tout $i \in I$, on a : $\quad |x_i p_i| \leq \begin{cases} x_i^2 p_i \text{ si } x_i \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\\ p_i \text{ si } x_i \in]-1;1[\end{cases}$

La série $\displaystyle\sum_{\substack{i \in I \text{ tel que} \\ x_i \in]-1;1[}} p_i$ est convergente ainsi que la série $\displaystyle\sum_{\substack{i \in I \text{ tel que} \\ x_i \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[}} x_i^2 p_i$.

Par suite par le théorème de majoration des séries à termes positifs, on en conclut à la convergence absolue de la série $\sum x_i p_i$ ce qui assure l'existence de $\mathbb{E}(X)$.

Définition 7 – Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe.

On appelle variance de X le réel défini par : $\mathbb{V}(X) = \underbrace{\qquad\qquad}_{\geq 0}$.

Formume de Huygens

On peut alors montrer que :

$$\mathbb{V}(X) = \underbrace{\qquad\qquad}_{\geq 0}$$

Formule de Koenig-Huygens

Écart-type

Lorsque $\mathbb{V}(X)$ existe, on définit l'écart-type $\sigma(X)$ de X par :

$$\sigma(X) =$$

□

Exemple 2 – Calcul de variance

Pour X telle que $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \end{cases}$ on a vu que $\begin{cases} \mathbb{E}(X) = 6 \\ \mathbb{E}\left(X^2\right) = 66 \end{cases}$.

On en déduit donc que : $\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X)^2 - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= 66 - 36 \\ &= 30 \end{aligned}$

□

Proposition 4 – Bilinéarité

Si X est une variable aléatoire finie admettant une **variance**,
alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une **variance** et on a :   .

□

Éléments de preuve:

8. Indépendance de variables aléatoire discrètes

Définition 8 – Indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes.

On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque pour tous $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) =$$

Extension à une famille de n variables aléatoires discrètes

On dit que les n variables aléatoires discrètes X_1, ..., X_n sont indépendantes lorsque pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_n = x_n]) =$$

□

Théorème 8 – Espérance et variance de variables aléatoires discrètes indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes   admettant une espérance et une variance,
alors les variables aléatoires $X + Y$ et $X \times Y$ admettent une espérance et une variance, et on a :

Extension à n variables aléatoires discrètes

Ce résultat s'étend naturellement à n variables aléatoires X_1, ..., X_n indépendantes où l'on aura sous réserve que tout ait du sens :

□

9. Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 9 – Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire discrète admettant une espérance,

alors pour tout $a > 0$, on a .

□

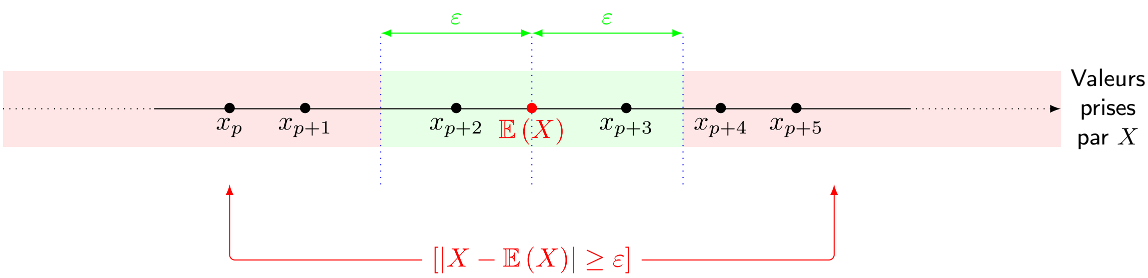
Éléments de preuve:

Théorème 10 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2,

alors pour tout $\varepsilon > 0$, .

Visualisation et interprétation



$\mathbb{P}([|X - E(X)| \geq \varepsilon])$ est la probabilité pour que X prenne des valeurs éloignées de $\mathbb{E}(X)$ d'au moins ε. Cette probabilité est d'autant plus faible que $\mathbb{V}(X)$ est plus petite et que ε est plus grand.

□

Éléments de preuve:

Proposition 5 – Variable aléatoire de variance nulle

Si X est une variable aléatoire discrète de , alors X est une variable aléatoire en dehors d'un événement de probabilité nulle.

□

Éléments de preuve:

10. Vers les couples de variables aléatoires discrètes

Définition 9 – Covariance de deux variables aléatoires discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance.

On définit la covariance $\mathrm{Cov}\,(X,\,Y)$ de X et Y comme étant l'espérance de la variable aléatoire $(X-\mathbb{E}\,(X))\,(Y-\mathbb{E}\,(Y))$, c'est à dire :

$$\mathrm{Cov}\,(X,\,Y)=\mathbb{E}\,((X-\mathbb{E}\,(X))\,(Y-\mathbb{E}\,(Y)))$$

Problèmes sous-jacent à cette définition

Le calcul de l'espérance de la variable aléatoire $(X-\mathbb{E}\,(X))\,(Y-\mathbb{E}\,(Y))$ sous-entend que l'on soit à même de calculer des sommes de séries doubles...

Coefficient de corrélation linéaire

Si on suppose de plus que X et Y admettent une variance non nulle, on appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y le réel $\rho(X,Y)$ de l'intervalle $[-1;1]$ défini par $\rho\,(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}\,(X,\,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.

□

Théorème 11 – Formule de Huygens pour la covariance et indépendance

Formule de Huygens

Si X et Y sont deux variables aléatoires qui admettent une covariance,
alors $\mathrm{Cov}\,(X,\,Y)=\mathbb{E}\,(XY)-\mathbb{E}\,(X)\,\mathbb{E}\,(Y)$.

C'est le moyen utilisé en général pour calculer une covariance.

Indépendance et covariance

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes,
alors $\mathrm{Cov}\,(X,\,Y)=0$.

La réciproque est fausse.

□