PR06

Probabilité sur un univers dénombrable

Version du 27-08-2022 à 12:57

1 . Préambule

Introduction – Ne jamais obtenir pile. . .

?

On lance une pièce parfaitement équilibré indéfiniment.
Quelle est est la probabilité [a] de l'événement $A =$« ne jamais obtenir pile » et surtout comment la définir ?

a. Et quel est d'ailleurs l'univers utilisé ?

Dans le cas où l'on s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à lancer n fois une pièce parfaitement équilibrée, on a pour univers $\Omega_n = \underbrace{\{P,F\} \times \{P,F\} \times \ldots \times \{P,F\}}_{n \text{ ensembles } \{P,F\}} = \{P,F\}^n$ il est clair que l'événement $A_n =$« on n'obtient jamais pile lors des n lancers » est tel que $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$.

Si l'on fait tendre n vers l'infini, il est tout à fait naturel de dire que $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on aurait alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ et il est aussi naturel d'écrire que $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

? A-t-on $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$?

On remarquera ici que la suite des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante [a] puisque l'événement A_{n-1} contient l'événement A_n.

a. au sens ensembliste du terme

? Est-on sûr que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un événement pour l'expérience aléatoire considérée ?

En effet, pour un univers fini, on a vu que l'on pouvait seulement donner du sens et calculer des probabilités d'événements de la forme $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_p$ ou $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_p$. . .

Il va donc être nécessaire de rajouter un axiome sur notre définition de probabilité donnée dans le cadre des univers finis, pour permettre le passage à la limite induit par cette écriture.

En tout état de cause, si l'on dispose des outils et des définitions adéquates, on pourra écrire :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \underset{\substack{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ suite} \\ \textbf{décroissante}}}{=} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$$

et l'on retrouve le résultat intuitif attendu.

□

2. Distinction fini et dénombrable

Définition 1 – Univers fini

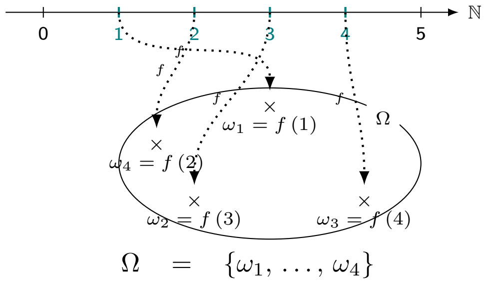
Ensemble fini

On dit qu'un ensemble Ω est lorsqu'il existe un entier p et une $f : [\![1;p]\!] \underset{\text{bijective}}{\longrightarrow} \Omega$.

L'entier p est alors appelé Ω est correspond au de Ω.

Univers fini

Dans le cas où l'univers Ω associé à une expérience aléatoire est un ensemble fini, on parle alors .



□

Exemple 1 – Ensembles et univers finis

Ensembles finis

L'ensemble $\mathcal{P}_{20}$ des nombres pairs inférieurs ou égaux à 20 est un ensemble fini. En effet, l'application

est bijective.

On peut montrer que l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à 100 est un ensemble fini car sous-ensemble d'un ensemble fini qu'est $[\![0;100]\!]$.

Univers finis

On lance trois fois de suite un dé à 6 faces parfaitement équilibré et l'on note les résultats obtenus à chacun des lancers successifs.
L'univers Ω associé à cet expérience est alors

qui est un ensemble fini de éléments.

□

Définition 2 – Univers dénombrable

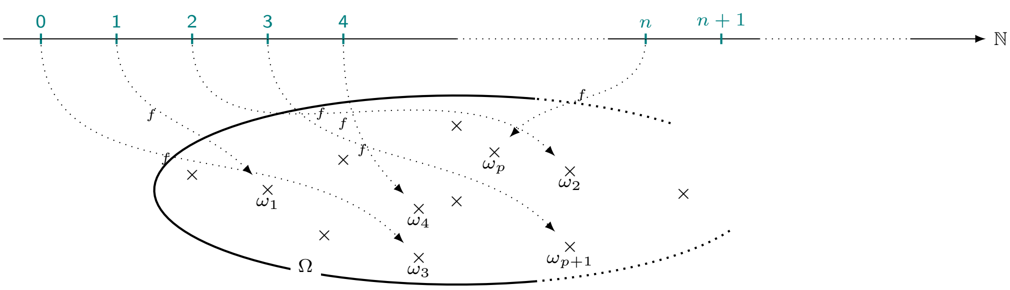
Ensemble dénombrable

On dit qu'un ensemble Ω est lorsqu'il est en avec $\mathbb{N}$.
Cela revient à dire que l'ensemble Ω peut s'écrire en extension sous la forme :

Univers dénombrable

Dans le cas où l'univers Ω associé à une expérience aléatoire est un ensemble dénombrable, on parle alors .

□



Exemple 2 – Ensembles et univers dénombrables

Ensembles dénombrables

- $\mathbb{N} =$ donc est dénombrable.
- $\mathcal{P} =$ ensemble des entiers naturels pairs est dénombrable.
- $\mathbb{Z} =$ est dénombrable aussi.
- $\mathbb{R}$ ainsi que tout intervalle non vide non réduit à un point de $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

Univers dénombrables

L'expérience aléatoire qui consiste à jeter une pièce parfaitement équilibrée jusqu'à obtenir « pile » conduit à proposer comme univers *a priori* où la « valeur » $+\infty$ traduit l'idée que .

Dans ce cas, on se contentera d'écrire qui est alors dénombrable.

□

3. Précision sur l'ensemble des événements

Définition 3 – Notion de tribus d'événements

Soit Ω un univers [a] associé à une expérience aléatoire.
On considère un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ [b], et on ira que $\mathcal{E}$ est une tribu Ω lorsque :

	Si E appartient à $\mathcal{E}$, alors appartient à $\mathcal{E}$.	$\mathcal{E}$ est stable par .

Dès lors que $\mathcal{E}$ est une tribu de Ω, il est immédiat que $\varnothing$ appartient à $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie ou dénombrable.

Espace probabilisable

Tout univers Ω muni d'une tribu $\mathcal{E}$ est appelé espace probabilisable, noté classiquement $(\Omega, \mathcal{E})$.

Les correspondent ainsi aux modélisée par l'univers Ω.

Terminologie complémentaire

La stabilité d'une tribu par réunion dénombrable est appelée $\sigma-$additivité de l'ensemble $\mathcal{E}$.

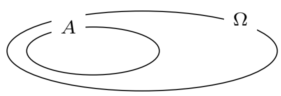
Exemples courant de tribus

L'ensemble est une tribu de Ω, appelée la tribu grossière ou triviale de Ω.	Pour toute partie A de Ω, l'ensemble est une tribu de Ω.	L'ensemble des parties de Ω est une tribu de Ω appelée tribu discrète ou pleine de Ω, et parfois « trop grande » travailler dans le cadre des univers non fins.

Opérations sur les événements d'une expérience aléatoire

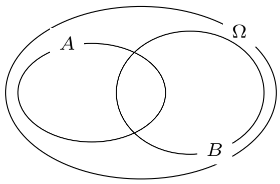
Soient A et B deux événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E})$ [c].

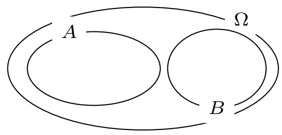
« le contraire de A s'est réalisé », événement appelé événement contraire de A qui correspond donc à $\overline{A}$;



CC BY NC ND

« A ou B se sont réalisés », c'est à dire l'un au moins des deux événements A ou B est réalisé au cours de cette expérience aléatoire, qui correspond donc à $A \cup B$;

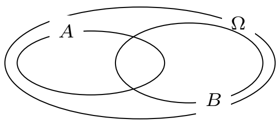


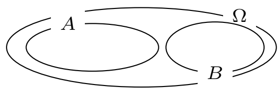


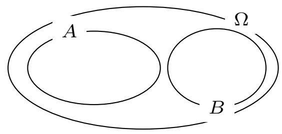
« A et B se sont réalisés », c'est à dire A et B sont réalisés au cours de cette expérience aléatoire, qui correspond donc à $A \cap B$;

« A est réalisé mais pas B » qui correspond à donc à $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

On dira que A et B sont deux événements incompatibles lorsque A et B ne peuvent se réaliser simultanément, c'est à dire lorsque $A \cap B = \varnothing$.







□

a. on donne ici une définition dans un cadre plus général que les simples univers finis
b. $\mathcal{E}$ est donc un ensemble de parties de Ω, c'est à dire un ensemble. . .d'ensembles !
c. fini ou dénombrable, la nature de Ω n'ayant pas d'incidence sur les définitions qui suivent.

4 . Espaces probabilisés

Définition 4 – Espaces probabilisés dénombrables

Soit $(\Omega, \mathcal{E})$ un espace probabilisable dénombrable associé à une expérience aléatoire.
Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{E})$ est une $\mathbb{P} : \mathcal{E} \longrightarrow [0;1]$ vérifiant :

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements ,
alors [a] : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) =$ et on parlera de $\sigma-$additivité.

a. Cela sous-entend que la série considérée est convergente. . .

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ est un dénombrable, et on dit parfois que $\mathbb{P}$ est la .

□

Pour rappel, pour Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements, une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]$ vérifiant : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et : $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$, $(A \cap B = \varnothing) \Rightarrow (\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$ où l'on disait déjà que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini, et on dit parfois que $\mathbb{P}$ est la loi de probabilité.

Ces deux définitions sont parfaitement compatibles, dans le sens où la définition donnée pour les espaces probabilisés dénombrables satisfait la définition donnée pour les espaces probabilisés finis.

Théorème 1 – Théorème de la limite monotone pour une suite d'évévnements

Soit $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Limite croissante

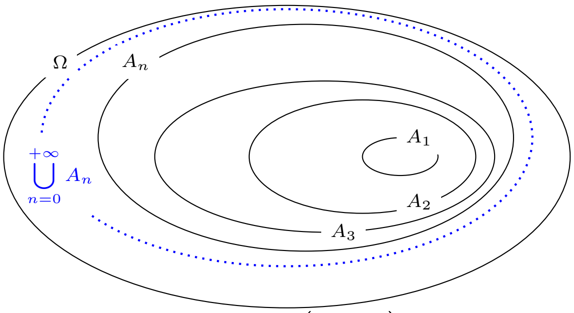
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements au sens où ,
alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) =$.

Limite décroissante

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements au sens où ,
alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) =$.

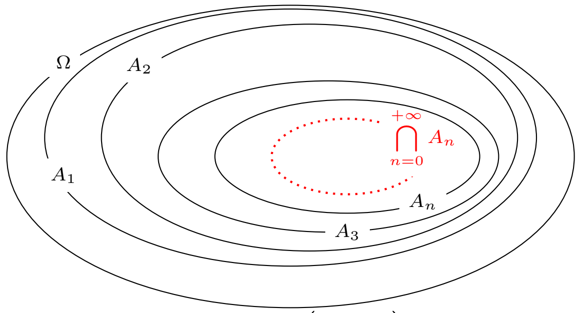
Illustration et ébauche de preuve

Limite croissante



$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_n \text{ donc } \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_n)$$

Limite décroissante



$$\bigcap_{k=0}^{n} A_k = A_n \text{ donc } \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_n)$$

□

On retrouve avec le deuxième point, le résultat attendu dans notre exemple d'introduction.

5 . Événements et probabilités

Contexte

Dans tout ce qui suit, on se place dans $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisable fini ou dénombrable.

Les énoncés qui suivent, sauf mention contraire spécifique, sont vrais dans les deux cas, et ont pour visée d'unifier les définitions et théorèmes déjà pour ces deux types d'espaces probabilisés.

□

Proposition 1 – Opérations sur les événements

Soient A et B deux événements.

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$

Cas d'un système complet d'événements

On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$ forme un système complet d'événements lorsque :

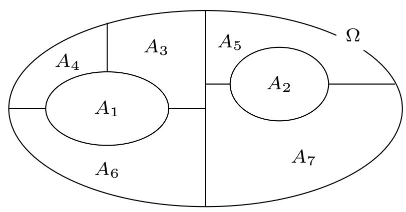
$$\forall (i,j) \in I \times I, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$

Les événements sont deux à deux incompatibles

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Les événements « recouvrent » Ω

Si $(A_i)_{i \in I}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$ est un système complet d'événements, alors $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$.



□

Théorème 2 – Probabilités et événements élémentaires

Soit Ω un univers dénombrable avec $\Omega = \{\omega_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.

Caractérisation d'une loi de probabilité par les évéments élémentaires

$$\left(\begin{array}{c} \mathbb{P} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définit} \\ \text{une loi de probabilité sur } \Omega \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) \in [0;1] \\ \text{La série } \sum \mathbb{P}(\{\omega_n\}) \text{ est } \qquad \text{ et } \end{array} \right)$$

Décomposition du calcul de la probabilité d'un événement

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, alors pour tout évenement A, la série est convergente et a pour somme .

Point méthode 1 – Montrer qu'une application définit une probabilité

Pour montrer qu'une application $\mathbb{P}$ définit une loi de probabilité sur $\Omega = \{\omega_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, on s'assurera de :

- La positivité de la probabilité des événements élémentaires...
  on montrera donc que : $\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) \geq 0$
- De la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(\{\omega_n\})$...
  par tous les moyens connus...
- Que cette série a pour somme 1...
  par tous les moyens connus...

Application| [4258] | **1**| **Loi de probabilité**

On considère un générateur aléatoire de nombre entiers naturels qui devra renvoyer l'entier $n \in \mathbb{N}$ avec la probabilité $\mathbb{P}(\{n\}) = \alpha \dfrac{2^n}{n!}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
Quelle valeur donner à α pour l'application $\mathbb{P}$ ainsi définie soit une probabilité sur $\mathbb{N}$?

6. Probabilités conditionnelles et univers dénombrable

Contexte

Toutes les définitions et théorèmes qui vont suivre étendent simplement la notion de probabilité conditionnelle rencontrée dans le cadre des espaces probabilisés finis aux espaces probabilisés dénombrables.

□

Théorème 3 – Définition de la probabilité conditionnelle

Soit A un événement tel que .

Pour tout événement B, on pose : $\mathbb{P}_A(B) =$

$\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{E})$, appelée **probabilité conditionnelle relative à A ou probabilité sachant A**.

Opérations avec $\mathbb{P}_A$

Puisque $\mathbb{P}_A$ est une loi de probabilité sur Ω, on retrouve les règles opératoires connues pour toute probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω. Par exemple, on retrouve que : $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) =$.

Si vous décidez décrire une formule portant sur les probabilités conditionnelles qui n'est pas présente dans ce document, alors elle doit être démontrée car il fort probable qu'elle soit fausse !

Autre notation et lecture

Dès lors que tout a du sens, $\mathbb{P}_A(B)$ est aussi noté .

La notation $\mathbb{P}_A(B)$ se lit « probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé » ou plus simplement « probabilité de B sachant A ».

□

Théorème 4 – Probabilités composées

Pour deux événements

Si A est un événement tel que alors $\mathbb{P}(A \cap B) =$

Formule des probabilités composée pour 2 événements

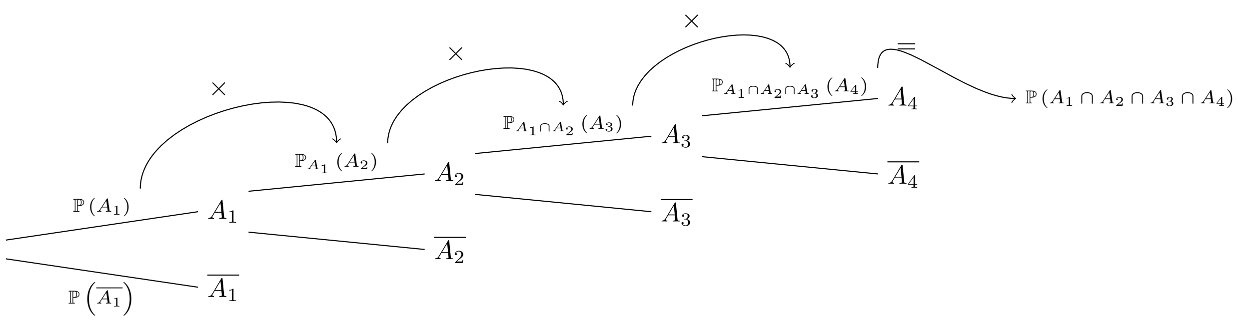
Cas général

Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements telle que

alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =$

Formule des probabilités composées pour n événements

Illustration de la formule pour une famille de 4 événements – Arbre pondéré à 4 étapes



CC BY NC ND

Cas typique d'utilisation

On utilise souvent la formule des probabilités composées lorsque la situation étudiée peut s'apparenter à des tirages successifs dans une urne, la composition de l'urne étant modifée à l'issue de chaque tirage (en particulier lorsque les tirages sont effectués sans remise).

□

Toutes les probabilités écrites ici ont un sens puisque : $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \ldots \cap A_j$ donc $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_j) \geq \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.

Théorème 5 – Probabilités totales

Pour tout **événement** B, on a :

Pour le système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$

$$\mathbb{P}(B) = $$
$$= $$

Généralisation aux systèmes complets d'événements

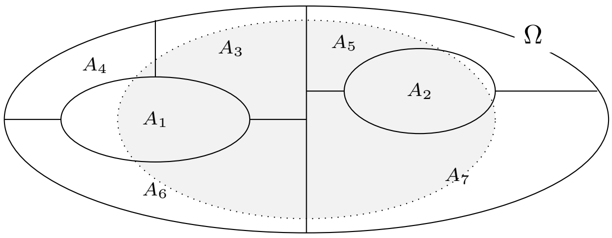
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évenements de probabilités **non nulles**.

$$\mathbb{P}(B) = $$

$$= $$

Formule des probabilités totales

Illustration



L'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B)$ a du sens car la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente de somme 1 et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap B_n \subset A_n$ et donc $\mathbb{P}(A_n \cap B) \leq \mathbb{P}(A_n)$.

□

Application| [1279] | 2| Probabilités conditionnelles

Un fumeur veut arrêter de fumer. Il est tiraillé entre le manque de volonté et la mauvaise conscience : s'il a réussi à ne pas fumer un jour, il fume le lendemain avec la probabilité $\frac{1}{2}$, mais s'il a fumé un jour, alors il ne fume le lendemain qu'avec la probablité $\frac{1}{4}$.
On note p_n la probabilité pour qu'il fume le n^{e} jour.
Calculer p_{n+1} en fonction de p_n, puis calculer p_n en fonction de p_1 et n, puis donner $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

$\square$

Théorème 6 – Formule de Bayes

Formule pour deux événements

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

En remarquant que $\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}\left(A\right) \times \mathbb{P}_A\left(B\right) \\ \mathbb{P}\left(B\right) \times \mathbb{P}_B\left(A\right) \end{array} \right.$, il vient que : $\mathbb{P}_B\left(A\right) =$

De plus, en utilisant le système complet d'événements , il vient que

$$\mathbb{P}\left(B\right) =$$

et ainsi : $\mathbb{P}_B\left(A\right) =$

Généralisation

Soit $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'évenements de probabilité non nulles, et B un évenement de probabilité non nulle.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}_B(A_k) \underset{\substack{\text{Probabilités} \\ \text{conditionnelles}}}{=}$

$\underset{\substack{\text{Probabilités} \\ \text{totales}}}{=}$

□

Application| [2334] | 3| Formule de Bayes

Dans un lot de pièces usinées, il y a 5% de pièces défectueuses. On contrôle les pièces à la sortie de l'usine, mais ce contrôle est aléatoire.

- Si une pièce est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 98% ;
- Si une pièce est bonne, elle est refusée avec une probabilité de 4% ;

On choisit au hasard une pièce que l'on contrôle.

(1). Déterminer la probabilité de l'événement « il y a une erreur dans le contrôle »

(2). Déterminer la probabilité que la pièce soit bonne sachant qu'elle est refusée.

(3). Déterminer la probabilité que la pièce soit mauvaise sachant qu'elle est refusée.

□

7. Indépendance de deux événements

Introduction 1 – Aspect intuitif de l'indépendance de deux événements

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Intuitivement, A et B sont **indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$

, c'est à dire si .

Ces deux égalités équivalent à et cette relation a encore un sens si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$.

□

Définition 5 – Événements indépendants

Deux événements A et B sont pour la probabilité $\mathbb{P}$ lorsque : $\mathbb{P}(A \cap B) \underset{\substack{A \text{ et } B \text{ sont} \\ \text{indépendants}}}{=}$

Importance de la loi de probabilité

La notion d'indépendance est liée à la probabilité $\mathbb{P}$ mise sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{E})$.

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On donne ci-contre deux lois de probabilités $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}_1(\{i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Pour $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ on a $A \cap B = \{2\}$.
Les événements A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}_1$ mais pas pour $\mathbb{P}_2$.

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}_2(\{i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

□

Éléments de preuve:

Théorème 7 – Événements indépendants liés à deux événements

Si A et B sont deux événements pour la probabilité $\mathbb{P}$,

alors sont également pour $\mathbb{P}$.

□

CC BY NC ND

8 . Indépendance de n événements

Définition 6 – Indépendance et indépendance mutuelle

On considère n évenements $A_1, \ldots, A_n$.

Indépendance deux à deux

On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$ tels que $i \neq j$, on a :

Indépendance mutuelle

On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si pour tout ensemble I d'indices choisis dans $[\![1; n]\!]$:

Différence entre indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

Indépendants deux à deux

Pour montrer que les événements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont indépendants deux à deux, on doit montrer que :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4)
\end{array}$$

Mutuellement indépendants

Pour montrer que les événements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont mutuelement indépendants, on doit montrer que :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4)
\end{array}$$

Situations classiques d'utilisation

La notion d'indépendance d'événements se rencontre dans les situations où l'on répète un certain nombre de fois la même expérience sans modification des conditions. En particulier :

- on lance plusieurs fois un dé ou une pièce
- on effectue des tirages avec remise

□

Proposition 2 – Lien entre indépendance et indépendance mutuelle

Si des évenements sont , alors sont indépendants.

La réciproque est fausse : des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants.

□

Proposition 3 – Événements indépendants liés à deux événements

On considère n événements indépendants $A_1, \ldots, A_n$.
Si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants.

Toute famille d'événements formée à partir des événements $(A_1, \ldots, A_n)$ et $\left(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}\right)$ est encore formée d'événements indépendants.

□