PR05

Indépendance et couples de variables aléatoires finies

Version du 26-08-2022 à 15:58

Contexte

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé fini ou non.

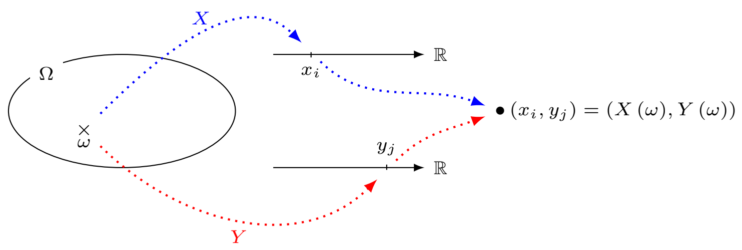
X et Y désignent deux variables aléatoires finies sur Ω c'est à dire que l'on a $\left\{ \begin{array}{l} X(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\} \\ Y(\Omega) = \{y_j,\, j \in J\} \end{array} \right.$ avec I et J des parties finies de $\mathbb{N}$ et pour illustrer certains résultats on supposera que et .

□

1. Loi d'un couple de variables aléatoires finies

Définition 1 – Couple de variables aléatoires finies

On appelle couple de variables aléatoires réelles finies et on note (X, Y) l'application définie par :



Loi du couple et mode d'obtention

On appelle loi du couple de variables aléatoires finies (X, Y) ou encore loi conjointe des variables aléatoires X et Y l'ensemble des couples $((x_i, y_j), p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ où :

$(x_i, y_j) \in$ et $p_{i,j} =$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots \quad \dots$	y_q
x_1			$\dots \quad \dots$	
x_2	$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_p			$\dots \quad \dots$	

□

Exemple 1 – Couple et lancers de dés

On lance un dé vert et un dé rouge à six faces parfaitement équilibrés.
Le résultat d'une telle expérience est donc un couple d'entiers (d_v, d_r) qui permet de décrire l'univers Ω comme étant $\Omega = [\![1;6]\!] \times [\![1;6]\!]$.
On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux dés, et Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux dés, pour lesquels on a trivialement que $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;6]\!]$.

Dé vert	Dé rouge	ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$(X,Y)(\omega)$
4	3				
2	5				
		$(5,4)$			
					$(4,2)$

Déterminer la loi conjointe des variables aléatoires X et Y c'est donc déterminer toutes les probabilités suivantes et les récapituler dans le tableau de loi conjointe ci-dessous.

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) & = & p_{1,1} \\
\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) & = & p_{1,2} \\
 & \vdots & \\
\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=6]) & = & p_{1,6} \\
\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1]) & = & p_{2,1} \\
\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2]) & = & p_{2,2} \\
 & \vdots & \\
\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=6]) & = & p_{2,6} \\
\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=1]) & = & p_{3,1} \\
\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=2]) & = & p_{3,2} \\
 & \vdots & \\
\mathbb{P}([X=3]\cap[Y=6]) & = & p_{3,6} \\
\mathbb{P}([X=4]\cap[Y=1]) & = & p_{4,1} \\
\mathbb{P}([X=4]\cap[Y=2]) & = & p_{4,2} \\
 & \vdots & \\
\mathbb{P}([X=4]\cap[Y=6]) & = & p_{4,6} \\
\mathbb{P}([X=5]\cap[Y=1]) & = & p_{5,1} \\
\mathbb{P}([X=5]\cap[Y=2]) & = & p_{5,2} \\
 & \vdots & \\
\mathbb{P}([X=5]\cap[Y=6]) & = & p_{5,6} \\
\mathbb{P}([X=6]\cap[Y=1]) & = & p_{6,1} \\
\mathbb{P}([X=6]\cap[Y=2]) & = & p_{6,2} \\
 & \vdots & \\
\mathbb{P}([X=6]\cap[Y=6]) & = & p_{6,6}
\end{array}$$

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$p_{1,3}$	$p_{1,4}$	$p_{1,5}$	$p_{1,6}$
2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$p_{2,3}$	$p_{2,4}$	$p_{2,5}$	$p_{2,6}$
3	$p_{3,1}$	$p_{3,2}$	$p_{3,3}$	$p_{3,4}$	$p_{3,5}$	$p_{3,6}$
4	$p_{4,1}$	$p_{4,2}$	$p_{4,3}$	$p_{4,4}$	$p_{4,5}$	$p_{4,6}$
5	$p_{5,1}$	$p_{5,2}$	$p_{5,3}$	$p_{5,4}$	$p_{5,5}$	$p_{5,6}$
6	$p_{6,1}$	$p_{6,2}$	$p_{6,3}$	$p_{6,4}$	$p_{6,5}$	$p_{6,6}$

□

Définition 2 – Lois marginales

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires finies.
La loi de X et la loi de Y sont appelées les lois marginales du couple (X,Y).

Loi de X

$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}([X = x_i]) =$

	y_1		y_j		y_q
x_1	$p_{1,1}$	$\cdots$	$p_{1,j}$	$\cdots$	$p_{1,q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	$p_{i,1}$	$\cdots$	$p_{i,j}$	$\cdots$	$p_{i,q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_p	$p_{p,1}$	$\cdots$	$p_{p,j}$	$\cdots$	$p_{p,q}$

Loi de Y

$\forall j \in j, \quad \mathbb{P}([Y = y_j]) =$

	y_1		y_j		y_q
x_1	$p_{1,1}$	$\cdots$	$p_{1,j}$	$\cdots$	$p_{1,q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	$p_{i,1}$	$\cdots$	$p_{i,j}$	$\cdots$	$p_{i,q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_p	$p_{p,1}$	$\cdots$	$p_{p,j}$	$\cdots$	$p_{p,q}$

□

Remarque 1 – Lien entre lois marginales et loi de couple

Les variables aléatoires X et X' ont même loi, de même que les variables aléatoires Y et Y' ont même loi.

Pourtant les couples (X, Y) et (X', Y') n'ont pas la même loi. Le lien entre les lois de couples et les lois marginales est donc moins caractéristique qu'attendu.

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0			$\frac{1}{2}$
1			$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$X' \backslash Y'$	0	1	Loi de X'
0			$\frac{1}{2}$
1			$\frac{1}{2}$
Loi de Y'	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$\square$

Application|[4259]**| 1| Déterminer la loi d'un couple**

Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues.
On extrait simultanément 3 boules de l'urne.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors d'un prélèvement et Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues lors d'un prélèvement.

(1). Déterminer la loi du couple (X, Y).

(2). Déterminer les lois marginales de X et Y.

$\square$

Définition 3 – Loi conditionnelle pour un couple de variables aléatoires

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires finies où $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in j\}$.

On suppose que $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$ sont tels que $\mathbb{P}([Y = y_j]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([X = x_i]) \neq 0$.

Loi conditionnelle de X sachant $[Y = y_j]$

	y_1		y_j		y_q
x_1	$p_{1,1}$	$\cdots$	$p_{1,j}$	$\cdots$	$p_{1,q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	$p_{i,1}$	$\cdots$	$p_{i,j}$	$\cdots$	$p_{i,q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_p	$p_{p,1}$	$\cdots$	$p_{p,j}$	$\cdots$	$p_{p,q}$

On appelle loi conditionnelle de X sachant $[Y = y_j]$ l'ensemble des couples $\left(x_i, \mathbb{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i])\right)$ pour $i \in I$.

	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_p
$\mathbb{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i])$	$\dfrac{p_{1,j}}{\mathbb{P}([Y = y_j])}$	$\cdots$	$\dfrac{p_{i,j}}{\mathbb{P}([Y = y_j])}$	$\cdots$	$\dfrac{p_{p,j}}{\mathbb{P}([Y = y_j])}$

On a donc : $\quad \forall i \in I, \qquad \mathbb{P}_{[Y=y_j]}([X = x_i]) =$

Loi conditionnelle de Y sachant $[X = x_i]$

	y_1		y_j		y_q
x_1	$p_{1,1}$	$\cdots$	$p_{1,j}$	$\cdots$	$p_{1,q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	$p_{i,1}$	$\cdots$	$p_{i,j}$	$\cdots$	$p_{i,q}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_p	$p_{p,1}$	$\cdots$	$p_{p,j}$	$\cdots$	$p_{p,q}$

On appelle loi conditionnelle de Y sachant $[X = x_i]$ l'ensemble des couples $\left(y_j, \mathbb{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j])\right)$ pour $j \in I$.

	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_q
$\mathbb{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j])$	$\dfrac{p_{i,1}}{\mathbb{P}([X = x_i])}$	$\cdots$	$\dfrac{p_{i,j}}{\mathbb{P}([X = x_i])}$	$\cdots$	$\dfrac{p_{i,q}}{\mathbb{P}([X = x_i])}$

On a donc : $\quad \forall j \in J, \qquad \mathbb{P}_{[X=x_i]}([Y = y_j]) =$

Illustration

On donne ci-dessous la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y).

X \ Y	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

La loi de X sachant $[Y = 1]$ est donc donnée par :

- $$\mathbb{P}_{[Y=1]}([X = 0]) = \frac{\mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 1])}{\mathbb{P}([Y = 1])} = \frac{3}{4}$$
- $$\mathbb{P}_{[Y=1]}([X = 1]) = \frac{\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])}{\mathbb{P}([Y = 1])} = \frac{1}{4}$$

□

Application| [4260] | **2**| **Loi conditionnelle**

On dispose d'une urne contenant deux boules noires et deux boules blanches toutes indiscernables au toucher. On lance un dé parfaitement équilibré à 4 faces, numérotées de 1 à 4. On désigne par X la variable aléatoire égale au résultat du lancer du dé. On prélève alors simultanément X boules dans l'urne et on note Y le nombre de boules rouges obtenues.
Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) puis la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 2]$.

□

Point méthode 1 – Loi de couple, marginales et conditionnelles

Sous réserve que chacune de ces écritures aient du sens :

Obtenir la loi conditionnelle à partir de la loi du couple

$\mathbb{P}_{[X=x_i]}([Y=y_j]) =$

$\mathbb{P}_{[Y=y_j]}([X=x_i]) =$

Obtenir les lois marginales à partir de la loi du couple

$\mathbb{P}([X=x_i]) =$

$\mathbb{P}([Y=y_j]) =$

Obtenir les lois marginales à partir des lois conditionnelles

$\mathbb{P}([X=x_i]) =$

$\mathbb{P}([Y=y_j]) =$

□

Application| [4261] **| 3| Loi conditionnelle**

On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boîte n° k contient k jetons numérotés de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis un jeton dans cette boîte.
On désigne par X la variable aléatoire égale au numéro de la boîte et Y la variable aléatoire égale au numéro du jeton tiré.

(1). Déterminer loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$ pour $i \in X(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

(2). En déduire la loi de Y.

(3). Déterminer alors $\mathbb{E}(Y)$.

□

2. Indépendance de deux variables aléatoires finies

Définition 4 – Indépendance de deux variables aléatoires finies

On dit que deux variables aléatoires finies X et Y sont indépendantes lorsque :

Autrement dit : .

□

Point méthode 2 – Montrer que deux variables aléatoires finies ne sont pas indépendantes

Pour montrer que deux variables aléatoires finies X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \neq \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$

En particulier, lorsque dans la loi conjointe de (X, Y) on remarquera que l'une des probabilités $\mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_i])$ est nulle, les deux variables aléatoires ne seront pas indépendantes dès lors que $\mathbb{P}([X = x_i]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([Y = y_j]) \neq 0$.

Illustration

On donne ci-dessous la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y).

X \ Y	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Les deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes puisque :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0]) \times \mathbb{P}([Y = 0]) &= \\ &= \\ & \qquad \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) \end{aligned}$$

On donne ci-dessous la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y).

X \ Y	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Les deux variables aléatoires X et Y sont puisque :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0]) \times \mathbb{P}([Y = 0]) &= \\ &= \\ & \qquad \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) \end{aligned}$$

et sur le même principe, on établirait que :

□

Théorème 1 – Indépendance et événements

On suppose que A est une partie de $X(\Omega)$ et B est une partie de $Y(\Omega)$, c'est dire $\left\{\begin{array}{l} A \subset X(\Omega) \\ B \subset Y(\Omega) \end{array}\right.$.

Si X et Y sont deux variables aléatoires finies ,

alors on a : $\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) \underset{\text{Déf.}}{=}$

$\underset{\text{Indép.}}{=} \quad \times$

En particulier : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = \quad \times$

Transfert du caractère indépendant

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles et $\left\{\begin{array}{l} f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ g : Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}\right.$,

alors les variables aléatoires images $f(X)$ et $g(Y)$ sont .

□

Application| [4262] | 4| Loi de couple

On dispose d'une urne contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10.
On effectue deux tirages avec remise.
On désigne par X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton obtenu et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du deuxième jeton.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $T = \max(X_1, X_2)$.

□

3. Indépendance de n variables aléatoires

Définition 5 – Variables aléatoires mutuellement indépendantes

On suppose que X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles finies.
On dit que les variables X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes lorsque :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega),$$
$$\mathbb{P}([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \ldots \cap [X_n = x_n]) = \qquad \times \qquad \times \ldots \times$$

□

Théorème 2 – Lemme des coalitions – Opérations avec les variables aléatoires indépendantes

Si X_1, X_2, ..., X_n sont n variables aléatoires réelles finies ,
alors toute variable aléatoire fonction des variables X_1, ..., X_p est de toute variable aléatoire fonction des variables X_{p+1}, ..., X_n où $p \in [\![2; n-1]\!]$.

Illustration

Si X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 sont 5 variables aléatoires mutuellement indépendantes,
alors les deux variables aléatoires $Y_1 = \cos(X_1) + \dfrac{X_2}{3}$ et $Y_2 = \mathrm{e}^{X_3}(X_4 - X_5)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

□

4. Somme et produit de deux variables aléatoires finies

Théorème 3 – Espérance de la somme et d'un produit de deux variables aléatoires finies

Si X et Y sont deux variables aléatoires finies,
alors les variables aléatoires $X + Y$ et $X \times Y$ admettent une espérance [a] et on a :

$$\underbrace{\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}_{\text{par linéarité de l'espérance}}$$

$$\underbrace{\mathbb{E}(X \times Y) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x \times y \times \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}_{\text{Il faut donc connaître la loi du couple } (X,Y)}$$

Illustration

On donne ci-dessous la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y).

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

On remarque que X et Y suivent toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$, donc par théorème, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y) \\ &= \\ \text{et } \mathbb{E}(X+Y) &= \qquad + \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\mathbb{E}(X \times Y) = \quad \times \quad \times \qquad + \quad \times \quad \times \qquad + \quad \times \quad \times \qquad + \quad \times \quad \times$$
$$=$$
$$=$$

□

a. normal...ce sont des variables aléatoires à supports finis, donc leur espérance se calcule à partir d'une somme finie

Théorème 4 – Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires finies ,
alors on a : $\mathbb{E}(X \times Y) = \quad \times \quad .$

Réciproque fausse

Certaines variables X et Y vérifient $\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X \times Y)$ sans pour autant que X et Y soient indépendantes.

□

Éléments de preuve:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X \times Y) &= \\
&\underset{\substack{X \text{ et } Y \\ \text{indépendantes}}}{=} \\
&= \sum_{i \in I} \left(\qquad \right) \\
&= \sum_{i \in I} \left(x_i \mathbb{P}([X = x_i]) \left(\qquad \right) \right) \\
&= \sum_{i \in I} \qquad \times \\
&= \qquad \times \left(\qquad \right) \\
&= \qquad \times
\end{aligned}$$

Exemple 2 – Produit de deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli indépendantes

On donne ci-dessous la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y).

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Les deux variables aléatoires X et Y sont .

Par suite, on en déduit que : $\mathbb{E}(X \times Y) = \quad \times$
Comme X et Y sont deux variables aléatoire de Bernoulli de même paramètre $p =$, on sait que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y) \\
&=
\end{aligned}$$

et par suite, on en déduit que $\mathbb{E}(X \times Y) = \quad .$

□

5 . Covariance

Définition 6 – Covariance de deux variables aléatoires finies

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies.

On appelle de X et Y le nombre réel : $\text{cov}(X,Y) =$

On remarquera en particulier que : $\text{cov}(X,X) =$

□

Théorème 5 – Calcul pratique de la covariance

Pour X et Y deux variables aléatoires réelles finies : $\text{cov}(X,Y) =$

Illustration

On donne ci-dessous la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X,Y).

$X \backslash Y$	0	1	Loi de X
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
Loi de Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Comme X et Y sont deux variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre $p =$, on sait que :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) =$$

On a déjà vu que : $\mathbb{E}(X \times Y) =$

On en déduit donc que : $\text{cov}(X,Y) = \quad - \quad \times$

$= \quad - \quad \times$

$= \quad -$

$=$

□

Éléments de preuve:

Théorème 6 – Lien entre variance et covariance

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies.
alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $\mathbb{V}(aX+bY) =$

On en déduit alors que : $\operatorname{cov}(X,Y) =$

Extension à n variables aléatoires

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires réelles finies,
alors $\mathbb{V}(X_1+\ldots+X_n) = \mathbb{V}(X_1)+\ldots+\mathbb{V}(X_n)+$.

□

Éléments de preuve: Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX+bY) &= \mathbb{E}\left((aX+bY-\mathbb{E}(aX+bY))^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left((aX+bY)^2 - 2\mathbb{E}(aX+bY)(aX+bY) + (\mathbb{E}(aX+bY))^2\right) \\
&\underset{\substack{\text{Linéarité de} \\ \text{l'espérance}}}{=} \mathbb{E}\left((aX+bY)^2\right) - 2\mathbb{E}(aX+bY)\mathbb{E}(aX+bY) + (\mathbb{E}(aX+bY))^2 \\
&\underset{\substack{\text{Linéarité de} \\ \text{l'espérance}}}{=} \mathbb{E}\left(a^2X^2+2abXY+b^2Y^2\right) - (\mathbb{E}(aX+bY))^2 \\
&\underset{\substack{\text{Linéarité de} \\ \text{l'espérance}}}{=} a^2\mathbb{E}\left(X^2\right) + 2ab\mathbb{E}(XY) + b^2Y^2 - (a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y))^2 \\
&= a^2\mathbb{E}(X) + 2ab\mathbb{E}(XY) + b^2\mathbb{E}\left(Y^2\right) - a^2(\mathbb{E}(X))^2 - 2ab\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - b^2(\mathbb{E}(Y))^2 \\
&= a^2\left(\mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2\right) + b^2\left(\mathbb{E}\left(Y^2\right) - (\mathbb{E}(Y))^2\right) + 2ab(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\
&= a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\operatorname{Cov}(X,\,Y)
\end{aligned}$$

6 . Variance, covariance et indépendance

Théorème 7 – Covariance de deux variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies.
Si X et Y sont , alors on a .

☐

Éléments de preuve:

Théorème 8 – Variance de deux variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies , alors $\mathbb{V}(X+Y) = \quad + \quad .$

Extension à n variables aléatoires finies

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires finies ,
alors $\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) =$

☐

Éléments de preuve:

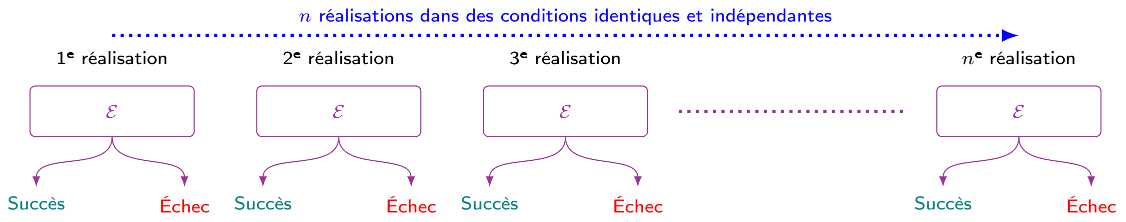
7. Autour de la loi binomiale

Théorème 9 – Décomposition d'une loi binomiale

Si $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ sont des variables aléatoires suivant toutes la loi de de paramètre $p \in [0;1]$,
alors la variable aléatoire $X =$ suit la loi de paramètres et .

Utilisation pour l'obtention de la variance d'une loi binomiale

On suppose disposer d'une épreuve $\mathcal{E}$ de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$ que l'on repète n fois dans des conditions identiques, c'est à dire que p est constant, et que les résultats des épreuves sont indépendants les uns des autres.



Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on considére l'indicatrice X_i de l'événement succès lors de la ie réalisation.
On a clairement que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Les variables aléatoires $X_1,\ \ldots,\ X_n$ ainsi définies sont clairement .

La variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès lors d'une réalisation d'un tel schéma de Bernoulli, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;\ p)$ et on a : $X =$.

Par indépendance, on a alors : $\mathbb{V}(X) =$.
$=$
$=$

□

Théorème 10 – Somme de lois binomiales de même probabilité de succès

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$.
Si X et Y sont deux variables aléatoires où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m;\ p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\ p)$,
alors $X+Y$ suit .

□

Éléments de preuve:

8. Coefficient de corrélation linéaire

Définition 7 – Variables non corrélées

Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies telles que $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont non corrélées.

Deux variables aléatoires réelles indépendantes sont donc non corrélées, mais deux variables aléatoires non corrélées peuvent ne pas être indépendantes.

□

Définition 8 – Coefficient de corrélation linéaire

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies toutes deux de variance non nulle.

On appelle coefficient de corrélation linéaire entre X et Y le réel $\rho(X,Y) =$.

□

Proposition 1 – Invariance d'échelle

Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a : $\rho(aX + b, cY + d) =$ où $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si} \\ -1 & \text{si} \end{cases}$

□

Éléments de preuve:

Théorème 11 – Majoration du coefficient de corrélation

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies de variances non nulles.

Encadrement de $\rho(X,Y)$

$$|\rho(X,Y)| \quad \leq \quad 1.$$

Cas égalité

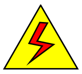
$$|\rho(X,Y)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \text{Il existe } (a,b) \in \mathbb{R}^2, \\ \mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1 \end{array} \right)$$

Interprétation du coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire est un réel de $[-1; 1]$ qui compare les similarités entre les lois des deux variables aléatoires X et Y.

Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable, c'est à dire $X = aY + b$ ou $Y = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, et égal à -1 dans le cas où la fonction affine est décroissante, c'est à dire si $a \leq 0$.

Les valeurs « intermédiaires » du coefficient de corrélation linéaire renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables.



Plus le coefficient est proche de 1 ou de -1, plus la corrélation entre les variables est forte. On dit dans ce cas que les variables sont fortement corrélées.
Un coefficient de corrélation égal à 0 signifie que $\mathrm{Cov}\,(X,\,Y) = 0$ et dans ce cas les variables sont non corrélées.

□

Éléments de preuve:
On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \mathbb{V}\,(\lambda X - Y) \end{array} \right.$

On a donc : $f\,(\lambda) =$

On remarque que la fonction f est une fonction polynôme de degré 2 qui est toujours

Son discriminant est donc

Ce dernier vaut :

On en déduit alors que :

Dans le cas où il y a égalité dans l'inégalité précdente, cela signifie qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f\,(\lambda_0) = 0$.

Ainsi la variable aléatoire $\lambda_0 X - Y$ est de variance nulle et ainsi cette dernière est ce qui assure que