PR04

Lois usuelles finies

Version du 09-02-2023 à 13:23

1 . Loi uniforme

Définition 1 – Loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit **la loi uniforme sur** $[\![1;n]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$, lorsque :

$$X(\Omega) = [\![1;n]\!] \text{ et : } \quad \forall k \in \underbrace{[\![1;n]\!]}_{=X(\Omega)}, \mathbb{P}([X=k]) = \frac{1}{n}$$

On écrit alors que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$.

□

Théorème 1 – Espérance et variance d'une loi uniforme

Si X suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

□

Éléments de preuve:

Définition 2 – Généralisation à $[\![a,b]\!]$

On dit que Y suit **la loi uniforme sur** $[\![a;b]\!]$ **avec** $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $a < b$, notée $\mathcal{U}([\![a;b]\!])$,

$$Y(\Omega) = [\![a;b]\!] \text{ et : } \quad \forall k \in \underbrace{[\![a;b]\!]}_{=Y(\Omega)}, \mathbb{P}([Y=k]) = \frac{1}{b-a+1}$$

Lien avec la loi uniforme

Si Y suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$, alors $X = Y - a + 1$ suit la loi uniforme sur $[\![1;b-a+1]\!]$.

□

Proposition 1 – Espérance et variance de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$

Si Y suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$,
alors $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{a+b}{2}$
et $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{(b-a)(b-a+2)}{12}$.

□

Éléments de preuve:

Application|[3518]**| 1| Utiliser une loi uniforme**

Un jeu propose les gains algébriques suivants, en euros, qui sont tous équiprobables : -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10 et 15.
On note X la variable aléatoire associée à ce gain.

(1). Exprimer X à l'aide d'une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$ et $n \in \mathbb{N}$ sous forme d'une relation affine.

(2). En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

□

2. Épreuve et loi de Bernoulli

Définition 3 – Épreuve de Bernoulli et loi de Bernoulli

On désigne par épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$, toute expérience aléatoire ne comportant que deux issues, l'une étant appelé le succès de probabilité p et l'autre l'échec de probabilité $1-p$.

On peut ainsi définir une variable aléatoire X de support $\{0,1\}$ par :

L'événement $[X=1]$
est l'événement succès.
$\mathbb{P}([X=1]) = p$

L'événement $[X=0]$
est l'événement échec.
$\mathbb{P}([X=0]) = 1-p$

k	0	1
$\mathbb{P}([X=k])$	$1-p$	p

et on dit alors que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1;p)$ ou $\mathcal{B}(p)$.

Indicatrice d'un événement

On considère une expérience aléatoire et A un événement associé à cette expérience de probabilité p.
La variable aléatoire X de support $\{0,1\}$ définie par :

- $[X=1] =$« l'événement A est réalisé » où l'on a donc $\mathbb{P}([X=1]) = p$;
- $[X=0] =$« l'événement A n'est pas réalisé » avec ainsi $\mathbb{P}([X=0]) = 1-p$.

est appelée variable indicatrice de l'événement A où l'on prolonge la terminologie précédente en disant que A est l'événement succès et $\overline{A}$ est l'événement échec.

Variable aléatoire de Bernoulli

Soit $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $p \in [0;1]$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1;p)$ ou $\mathcal{B}(p)$ lorsque :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \text{ et } \begin{cases} \mathbb{P}([X=0]) = 1-p \\ \mathbb{P}([X=1]) = p \end{cases}$$

où l'événement $[X=1]$ est appelé succès et $[X=0]$ est appelé échec.

□

Théorème 2 – Espérance et variance

Si X suit la loi de **Bernoulli** de paramètre p,
alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$. □

Éléments de preuve:

Exemple 1 – Optimisation du paramètre d'une loi de Bernoulli

?

Pour quelle(s) valeur(s) de $p \in [0;1]$, $\mathbb{V}(X)$ est maximale pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1;p)$? □

Éléments de preuve:

Application|[3519]| 2| Loi de Bernoulli

On lance un dé. On gagne 1 euro lorsqu'on fait un résultat supérieur ou égal à 5 et rien sinon. On note G son gain. Déterminer la loi de G, ainsi que $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$. □

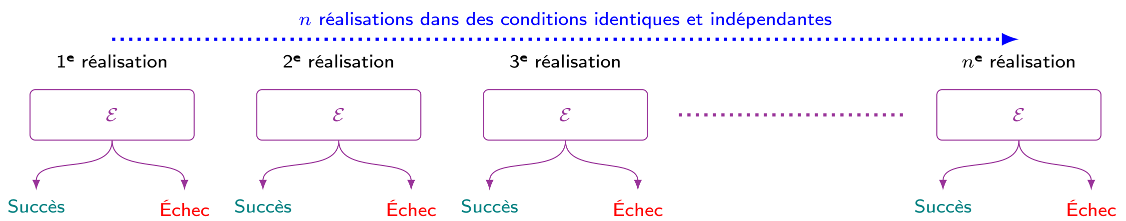
Application|[3520]| 3| Loi de Bernoulli

On s'intéresse au taux d'échec d'un gymnaste lors de sa dernière figure. On suppose que la variable aléatoire qui vaut 1 lorsqu'il rate cette figure et 0 sinon suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$. Expérimentalement on a estimé que $\mathbb{V}(X) \approx \frac{1}{4}$. Avec quelle probabilité le gymnaste rate-t-il sa dernière figure ? □

3 . Loi binomiale

Définition 4 – Schéma de Bernoulli et loi binomiale

On suppose disposer d'une épreuve $\mathcal{E}$ de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$ que l'on repète n fois dans des conditions identiques, c'est à dire que p est constant, et que les résultats des épreuves sont indépendants les uns des autres.



On parle alors de schéma de Bernoulli, et le résultat d'un tel schéma conduit ainsi à une succession ordonnée des « mots » succès et échec.

Un univers permettant de modéliser cette situation pourra être l'ensemble $\Omega = \underbrace{\{E,S\} \times \{E,S\} \times \ldots \times \{E,S\}}_{n \text{ éléments}}$ où E désigne l'échec et S le succès, Ω étant ainsi l'ensemble des $n-$uplets d'éléments de l'ensemble $\{E,S\}$.

On définit une variable aléatoire X sur cette expérience aléatoire, comme étant le nombre d'apparition de l'événement succès de l'épreuve de Bernoulli $\mathcal{E}$ considérée lors de cette répétition.

Par exemple, pour $n=4$, on aura :

$$\begin{array}{lcl} [X=0] & = & \{(E,E,E,E)\} \\ [X=1] & = & \{(S,E,E,E),(E,S,E,E),(E,E,S,E),(E,E,E,S)\} \\ [X=2] & = & \{(S,S,E,E),(S,E,S,E),(S,E,E,S),(E,S,S,E),(E,S,E,S),(E,E,S,S)\} \\ [X=3] & = & \{(S,S,S,E),(S,S,E,S),(S,E,S,S),(E,S,S,S)\} \\ [X=4] & = & \{(S,S,S,S)\} \end{array}$$

Le support de X est alors $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

Loi de X

Soit $k \in [\![0;n]\!] = X(\Omega)$.

L'événement $[X=k]$ se réalise lorsque le $n-$uplet de résultats présente k succès et $n-k$ échecs.

Dans un $n-$uplet de résultats contenant k succès, il y a $\binom{n}{k}$ façon de choisir la position des succès.

Lorsque l'on connaît le rang des k événements succès lors d'une réalisation, l'indépendance des épreuves assure que la probabilité d'un tel événement vaut $p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Ainsi, l'événement $[X=k]$ est la réunion disjointe de $\binom{n}{k}$ événements qui ont tous a même probabilité de réalisation.

On en déduit que : $\mathbb{P}([X=k]) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Décomposition de X en loi de Bernoulli

Pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on considère la variable aléatoire de Bernoulli X_i de paramètre p, indicatrice de l'événement succès pour la i^{e} épreuve : $\begin{cases} [X_i=0] = \text{« La } i^{\text{e}} \text{ épreuve a donné un échec »} \\ [X_i=1] = \text{« La } i^{\text{e}} \text{ épreuve a donné un succès »} \end{cases}$

On a donc : $$\begin{array}{rcl} X & = & X_1 + X_2 + \ldots + X_n \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}$$

La réalisation de l'événement $[X=k]$ correspond à ce que k variables aléatoires X_i prennent la valeur 1 et $n-k$ autres prennent la valeur 0.

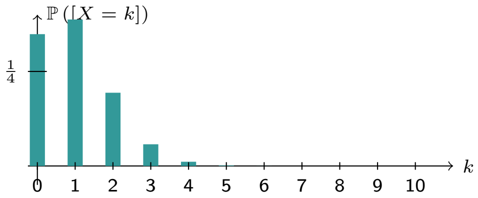
$\square$

Définition 5 – Loi binomiale

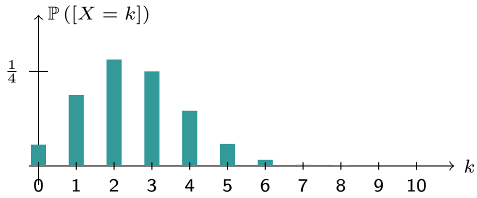
Soit $p \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de paramètre n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\, p)$ lorsque :

$$X(\Omega) = \underbrace{[\![0;n]\!]}_{=\{0,1,\ldots,n\}} \quad \text{et :} \quad \forall k \in \underbrace{[\![0;n]\!]}_{=X(\Omega)},\ \mathbb{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

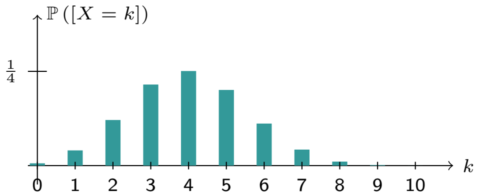
Visualisation



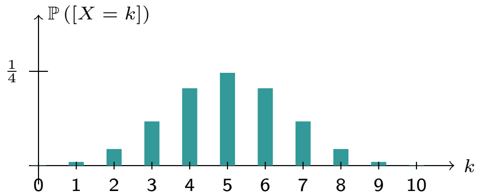
Loi $\mathcal{B}(10;\ 0{,}1)$



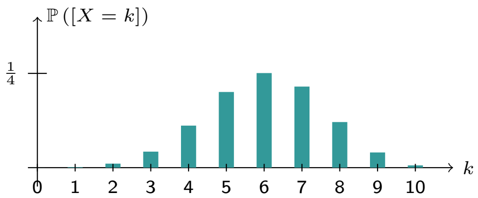
Loi $\mathcal{B}(10;\ 0{,}25)$



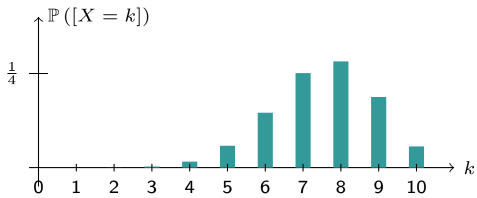
Loi $\mathcal{B}(10;\ 0{,}4)$



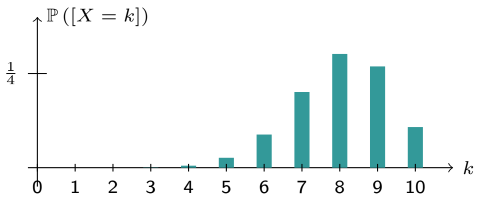
Loi $\mathcal{B}(10;\ 0{,}5)$



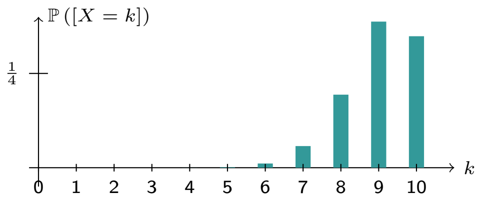
Loi $\mathcal{B}(10;\ 0{,}6)$



Loi $\mathcal{B}(10;\ 0{,}75)$



Loi $\mathcal{B}(10;\ 0{,}8)$



Loi $\mathcal{B}(10;\ 0{,}9)$

□

On remarque que :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n$ d'après la formule du binôme et vaut donc 1.
  Par ailleurs, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \geq 0$, et on définit bien une loi de probabilité.
- La loi de Bernoulli est notée $\mathcal{B}(1,p)$ car elle est identique à la loi binomiale de paramètres $n=1$ et p.

Théorème 3 – Espérance et variance d'une loi binomiale

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

□

Éléments de preuve:

Application| [3521] **| 4| Loi Binomiale**

Un conseil d'administration valide sa décision lorsque 10 au moins des 12 membres sont d'accord. Chacun des membres prend sa décision indépendamment des autres et choisit d'accepter avec la probabilité $\frac{3}{4}$. Déterminer le nombre moyen de membres qui acceptent, puis la probbailité que la décision soit validée.

□