PR03

Variables aléatoires finies sur un univers fini

Version du 09-02-2023 à 13:20

Contexte

Dans tout ce qui suit, on fait référence à une expérience aléatoire et à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ associé, et dans tout ce chapitre, l'univers Ω est supposé fini avec $\Omega = \{w_1, \ldots, \omega_n\}$.
.

□

1. Notion de variable aléatoire

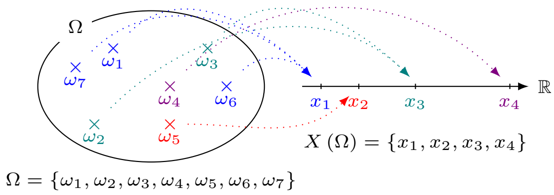
Définition 1 – Variable aléatoire réelle finie

On considère une application

$$X : \left| \begin{array}{lcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array} \right.$$

L'ensemble des valeurs prises par X est appelé le support de X et on a :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega), \, \omega \in \Omega\} \\ & \underset{\Omega \text{ fini}}{=} & \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \end{array}$$



On dira alors que X est une variable aléatoire réelle à support fini sur Ω lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{E}$, c'est à dire est un événement.

On notera alors $\begin{array}{rcl} [X = x] & = & X^{-1}(\{x\}) \\ & = & \{\omega \in \Omega, \, X(\omega) = x\} \end{array}$.

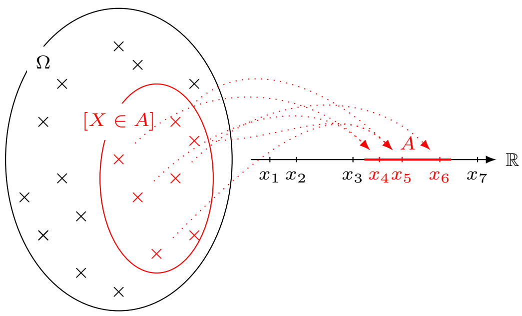
Événements associés à une variable aléatoire

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on définit l'évévement $[X \in A]$ par :

$$[X \in A] = \{\omega \in \Omega, \, X(\omega) \in A\}$$

En particulier pour $A = [a; b]$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} [X \in [a; b]] & = & [a \leq X \leq b] \\ & = & \{\omega \in \Omega, \, a \leq X(\omega) \leq b\} \\ [X \in]-\infty; b]] & = & [X \leq b] \\ & = & \{\omega \in \Omega, \, X(\omega) \leq b\} \end{array}$$



□

Exemple 1 – Histoire de dés

On lance un dé parfaitement équilibré, et on calcule le produit du numéro indiqué sur la face supérieure du dé par celui de la face cachée du dé.
Cette « action » permet de définir une variable aléatoire P sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Quel est le support $P(\Omega)$ de P?

On lance deux dés parfaitement équilibré, et on calcule la somme des deux faces supérieures des dés.
Cette « action » permet de définir une variabe aléatoire S.

Quel est l'univers Ω associé à cet expérience et quel est le support $S(\Omega)$ de S ?

Contexte

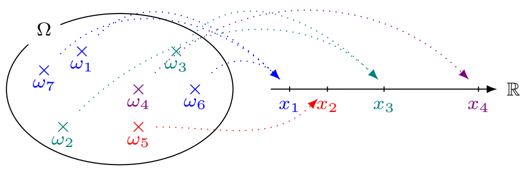
Dans tout ce qui suit, pour alléger les énoncés qui vont suivre, dès lors que X désignera une variable aléatoire à support fini sur Ω, on décrira son support $X(\Omega)$ par $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ où l'on supposera que $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$.

Proposition 1 – Système complet d'événement associé à une variable aléatoire

Si X est une variable aléatoire à support fini sur Ω, alors la famille d'événements $([X = x_1], [X = x_2], \ldots, [X = x_m])$ est un système complet d'événements de Ω.

De façon plus générale, la famille $([X = x], x \in X(\Omega))$ est un système complet d'événements .

Illustration



On a a ici $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ avec dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\} \\
&= \{ \underbrace{\omega_1, \omega_6, \omega_7,}_{=[X=x_1]} \underbrace{\omega_5}_{=[X=x_2]}, \underbrace{\omega_2, \omega_3}_{=[X=x_3]}, \underbrace{\omega_4}_{[X=x_4]} \} \\
&= \{[X = x_1], [X = x_2], [X = x_3], [X = x_4]\}
\end{aligned}$$

Définition 2 – Loi d'une variable aléatoire | X une variable aléatoire à support fini sur Ω

En posant $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}([X \in A])$ pour tout partie A de $\mathbb{R}$, on définit une **probabilité sur l'ensemble des valeurs prises par** X, c'est à dire $X(\Omega)$.

On dit alors que $\mathbb{P}_X$ est **la loi de probabilité de** X ou **loi** ou de **distribution**.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}([X = x])$ est ainsi la probabilité que X prenne la valeur x.

On peut définir $\mathbb{P}_X$ par la donnée des $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}([X = x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

La loi P_X de X est en fait la probabilité définie sur $X(\Omega)$ par $P_X : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}([X = x]) \end{array} \right.$.

On a en particulier : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}([X = x_i]) = 1$.

□

Point méthode 1 – Obtention de la loi de probabilité de X

Déterminer la loi de probabilité de la X revient à déterminer l'ensemble des couples (x_i, p_i) où $\left\{ \begin{array}{l} x_i \in X(\Omega) \\ p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \end{array} \right.$.

Étape 1 : on détermine le support de X, c'est à dire les valeurs x_i prises par X pour obtenir $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Étape 2 : on détermine toutes les probabilités $\mathbb{P}([X = x_i]) = p_i$, résultats que l'on récapitule lorsque c'est possible dans un tableau comme ci-contre.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_m
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_{m-1}	p_m

□

Application| [3507] | 1| Variables aléatoires

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On gagne 6€ lorsque le 6 apparaît, 5€ pour le 5 et on perd 3€ dans les autres cas.

On note X la variable aléatoire prenant pour valeur le gain (positif ou négatif) obtenu.

Déterminer la loi de probabilité de X.

□

Application| [3508] | 2| Somme des dés

On lance deux dés indiscernables et on note X la somme des deux dés.

Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

□

2. Caractérisation des lois de variables aléatoires

Théorème 1 – Caractérisation des lois de probabilité d'une variable aléatoire

Soit $\left\{(x_i, p_i)_{i \in [\![1;m]\!]}\right\}$ une famille de couples de réels tels que les x_i soient deux à deux distincts.

$$\left(\begin{array}{c} \left\{(x_i, p_i)_{i \in [\![1;m]\!]}\right\} \text{ est la} \\ \text{loi de probabilité d'une} \\ \text{variable aléatoire} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [\![1;m]\!], p_i \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \end{array} \right.$$

$\square$

Exemple 2 – Ajustement d'un paramètre pour une loi

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On suppose que X est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X = k]) = \binom{n}{k} \dfrac{\beta}{n+1}$.

Quelle valeur donner à β pour que l'on définisse ainsi une loi de probabilité pour X ?

$\square$

3. Probabilités d'un événement associé à une variable aléatoire

Théorème 2

On suppose que X est une variable aléatoire réelle finie sur Ω.

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, alors : $\mathbb{P}([X \in A]) = \displaystyle\sum_{x \in A} \mathbb{P}([X = x])$.

$\square$

Application| [3509] | 3| Histoire de QCM

Un candidat répond au hasard à un QCM qui comprend quatre questions. Pour chaque question, il choisit une réponse parmi les trois qui lui sont proposées, une seule de ces trois réponses est exacte, le candidat étant reçu s'il donne au moins trois réponses exactes.

Calculer la probabilité qu'il soit reçu.

$\square$

4. Fonction de répartition

Définition 3 – Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω.

On appelle **fonction de répartition de** X, la fonction F, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$

$\square$

Proposition 2 – Propriétés générales d'une fonction de répartition

Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs rélles, alors :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- F est continue à droite en tout réel ;
- $F(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$
- $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Ces propriétés sont caractéristiques d'une fonction de répartition.

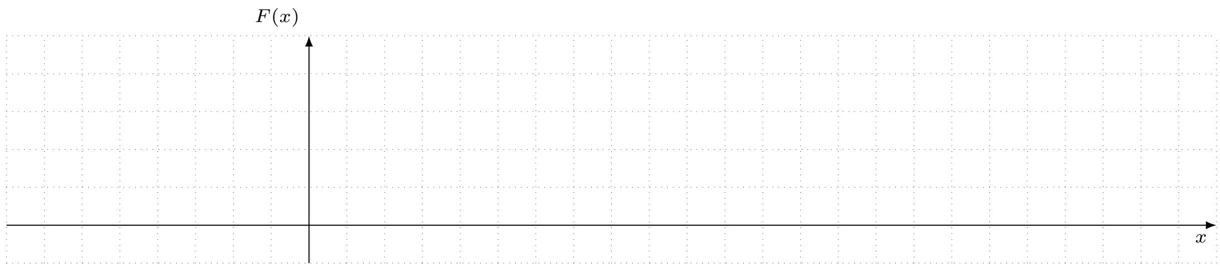
□

Exemple 3 – Construction d'une fonction de répartition

On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = [\![0;4]\!]$ avec $\mathbb{P}([X=0]) = \dfrac{1}{10}$, $\mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}([X=2]) = \dfrac{1}{2}$.

? Sachant que les événements $[X=3]$ et $[X=4]$ sont équiprobables, déterminer complètement la loi de X.

? Déterminer une expression de la fonction de répartition F_X de X, puis la construire.



□

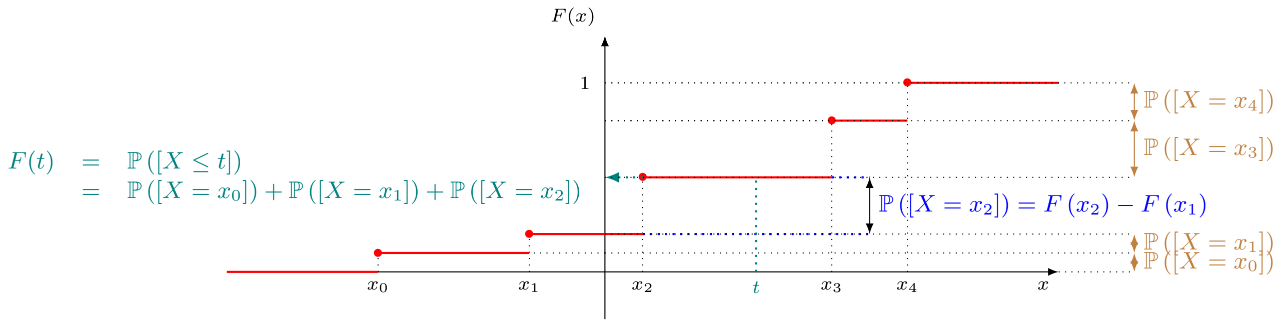
Proposition 3 – Lien entre loi de probabilité et fonction de répartition

Soit X une **variable aléatoire** définie sur Ω où $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_m\}$ avec $x_i < x_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1; m-1]\!]$.
Alors :

$$\forall i \in [\![2; m]\!], \quad \mathbb{P}([X = x_i]) = \mathbb{P}([X \leq x_i]) - \mathbb{P}([X \leq x_{i-1}]) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$$

On pourra donc, dans ce cas là, **trouver la loi de X à l'aide de sa fonction de répartition**.

Illustration - Fonction de répartition d'une variable aléatoire à support fini où $X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$



La fonction de répartition présente des points de discontinuité en chaque valeur prise par X.

□

Application|[3511]| 4| Utiliser la fonction de répartition

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remise.
On note X_1 le numéro de la première boule et X_2 le numéro de la seconde boule, et Y le plus grand des deux numéros.
Déterminer la loi de Y.

□

5. Image d'une variable aléatoire par une application

Définition 4 – Image d'une variable aléatoire par une fonction

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$.
La fonction, notée $g(X)$ définie par : $g(X) : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & g(X(\omega)) \end{array} \right.$, est une nouvelle variable aléatoire, appelée **image de X par g**.

□

Application|[3512]| 5| Image d'une variable aléatoire

Soit $p \in]0; 1[$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([X = -1]) = \frac{p}{2}, \quad \mathbb{P}([X = 0]) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = 1]) = \frac{p}{2}.$$

Déterminer la loi de $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.

□

6. Espérance

Définition 5 – Espérance

Soit X un variable aléatoire réelle finie sur Ω.
On appelle **espérance** de X le réel noté $\mathbb{E}(X)$ défini par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \times X(\omega) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}_X(\{x\}) \\
&\underset{X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_m\}}{=} \sum_{i=1}^{m} x_i \times \mathbb{P}([X = x_i])
\end{aligned}$$

L'espérance $\mathbb{E}(X)$ s'interprète comme la moyenne probable des valeurs prises par X.

□

Application|[3513]| 6| Calcul d'espérance

Calculer l'espérance de X dont la loi est donnée par :

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}([X = x])$	0,920	0,060	0,016	0,004

□

Proposition 4 – Positivité et croissance de l'espérance

Pour X et Y deux variables aléatoires réelles finies sur Ω :

- Si pour tout $\omega \in \Omega$, $a \leq X(\omega) \leq b$, alors $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$.
- Si X est positive, au sens où $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors on a $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- Si $X \leq Y$ au sens où $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

□

Éléments de preuve:

7. Théorème du transfert et linéarité de l'espérance

Théorème 3 – Théorème du transfert

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω et $g: X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$.
La variable aléatoire $g(X)$ admet une **espérance** :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \times \mathbb{P}([X = x]) \underset{X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_m\}}{=} \sum_{i=1}^{m} g(x_i) \times \mathbb{P}([X = x_i])$$

Utilisation pour le calcul d'espérance pour X^k ou $\dfrac{1}{X}$ pour X variable aléatoire réelle finie

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^k admet une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k \times \mathbb{P}([X = x]) \underset{X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_m\}}{=} \sum_{i=1}^{m} x_i^k \times \mathbb{P}([X = x_i])$$

Si $0 \notin X(\Omega)$, alors la variable aléatoire $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \frac{1}{x} \times \mathbb{P}([X = x]) \underset{X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_m\}}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i} \times \mathbb{P}([X = x_i])$$

□

Définition 6 – Moment d'ordre k où $k \in \mathbb{N}$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Pour X variable aléatoire réelle finie sur Ω, on appelle moment d'ordre k de X l'espérance de la variable aléatoire finie X^k, c'est à dire $\mathbb{E}\left(X^k\right)$.

Cas particulier du moment d'ordre 2

$\mathbb{E}\left(X^2\right)$ est donc le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire X.
On remarquera notamment en utilisant la linéarité de l'espérance [a] que :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}\left(X^2 - X\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)$$

ce qui pourra nous donner dans certaines situations un moyen rapide d'accéder au moment d'ordre 2 de X.

□

a. voir juste après...

Théorème 4 – Linéarité de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles finies,
alors : $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

□

Éléments de preuve:

Application| [3515] **| 7| Espérance et transfert**

Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}([X=-1]) = \frac{p}{2}, \quad \mathbb{P}([X=0]) = 1-p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X=1]) = \frac{p}{2}.$$

Calculer $\mathbb{E}(2X+1)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

□

Proposition 5 – Lien moment d'ordre 2 et espérance

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω. Alors : $(\mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.

□

Éléments de preuve:

Proposition 6 – Variable centrée

Une variable aléatoire réelle X est dite **centrée** lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.

Si X est une variable aléatoire finie quelconque, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est une **variable centrée**.

□

Éléments de preuve:

8. Variance et écart-type

Définition 7 – Variance

Soit X une variable aléatoire réelle finie sur Ω.
On appelle **variance de** X le réel $\mathbb{V}(X)$ défini par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$ et **écart-type de** X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

□

Théorème 5 – Formule de Huygens

Si X^2 admet une **espérance** [a], alors X admet une **variance**, et dans ce cas : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

□

a. Cette formulation est malvenue mais volontaire : une variable aléatoire réelle finie X a toujours une espérance, ainsi que X^2, X^3, etc. Cependant ce ne sera pas toujours le cas pour d'autres types de variables aléatoires. . .et cet énoncé prendra tout son sens

Éléments de preuve:

Application| [3516] **| 8| Variance d'une variable aléatoire**

Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6.

(1). Déterminer la loi de X sachant que $\mathbb{P}([X=3]) = \mathbb{P}([X=4])$, $\mathbb{P}([X<5]) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}([X>5]) = \dfrac{1}{4}$.

(2). Calculer ensuite $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

□

Application| [0806] **| 9| Espérance et variance**

Soit $\theta \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right[$ et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0;3]\!]$, dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\mathbb{P}([X=0]) = \mathbb{P}([X=3]) = \theta; \quad \mathbb{P}([X=1]) = \mathbb{P}([X=2]) = \frac{1}{2} - \theta$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

□

Proposition 7 – Bilinéarité

Si X est une variable aléatoire finie admettant une **variance** [a], alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aX+b$ admet une **variance** et on a : $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

□

a. même remarque que précédemment

Éléments de preuve:

9. Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Contexte

Les énoncés qui suivent tombent sous le coup de la remarque précédente au niveau donc de la surabondance des hypothèses sur l'existence de moments d'ordre 1 et d'ordre 2.

□

Théorème 6 – Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire finie à valeurs positives admettant une espérance,

alors pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{P}([X \geq a]) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

□

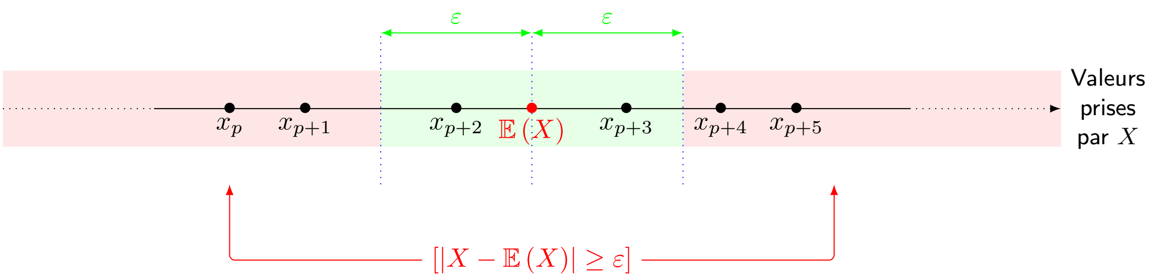
Éléments de preuve:

Théorème 7 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est une variable aléatoire finie admettant un moment d'ordre 2,

alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}([|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon]) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$

Visualisation et interprétation



$\mathbb{P}([|X - E(X)| \geq \varepsilon])$ est la probabilité pour que X prenne des valeurs éloignées de $\mathbb{E}(X)$ d'au moins ε. Cette probabilité est d'autant plus faible que $\mathbb{V}(X)$ est plus petite et que ε est plus grand.

□

Éléments de preuve:

Proposition 8 – Variable aléatoire de variance nulle

Si X est une variable aléatoire finie de variance nulle, alors X est une variable aléatoire constante en dehors d'un événement de probabilité nulle.

$\square$

Éléments de preuve: