PR02

Conditionnement et indépendance

Version du 09-02-2023 à 13:05

Contexte

Dans tout ce qui suit, on considère une expérience aléatoire dont on note Ω l'univers des possibles que l'on suppose fini, et on se place ainsi dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

☐

1. Vers la notion de conditionnement

Introduction 1 – Fréquence conditionnelle

Un stage d'été propose une activité linguistique et une activité sportive. Le tableau donne la répartition de 150 stagiaires selon la langue étudiée et le sport choisi.
On tire au sort un stagiaire au hasard.

	tennis	équitation	voile	total
anglais	45	18	27	90
allemand	33	9	18	60
total	78	27	45	150

? Déterminer, dans chaque cas, l'unique réponse exacte parmi les trois proposées.

La probabilité de l'événement « le stagiaire pratique le tennis ou l'allemand » est égale à :

☐ $\dfrac{138}{150}$ ☐ $\dfrac{33}{150}$ ☐ $\dfrac{105}{150}$

La probabilité de l'événement « le stagiaire pratique la voile et l'allemand » est égale à :

☐ $\dfrac{18}{45}$ ☐ $\dfrac{18}{60}$ ☐ $\dfrac{18}{150}$

$\dfrac{45}{78}$ représente la probabilité qu'il...

- ☐ pratique le tennis et étudie l'anglais
- ☐ pratique le tennis sachant qu'il étudie l'anglais
- ☐ étudie l'anglais sachant qu'il pratique le tennis

La probabilité qu'il pratique l'équitation sachant qu'il étudie l'allemand est égale à :

☐ $\dfrac{9}{27}$ ☐ $\dfrac{9}{18}$ ☐ $\dfrac{9}{60}$

☐

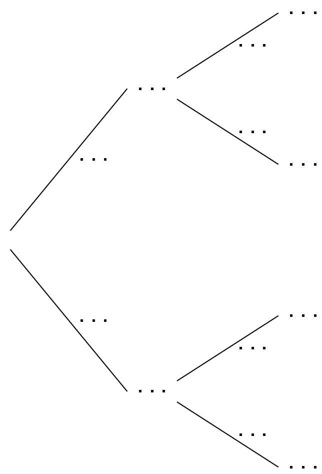
Introduction 2 – Conditionnement lié à une succession d'expériences

On dispose de deux pièces. L'une est parfaitement équilibrée, et l'autre est truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir le six est de $\frac{1}{4}$, les autres faces étant équiprobables

On réalise alors l'expérience aléatoire suivante : *si la pièce truquée donne le six, on la relance une fois, sinon, on lance une fois la pièce équilibrée*. On observe alors le résultat obtenu lors du dernier lancer de pièce.
On définit les événements suivants :

- S_1 **:** « le lancer de la première pièce a amené le six »
- S_2 **:** « le lancer de la deuxième pièce a amené le six »

Cette expérience aléatoire peut être modélisée par l'arbre pondéré ci-contre. Le compléter.



Quelle est alors la probabilité que le deuxième lancer amène le six ?

□

2. Probabilité conditionnelle

Théorème 1 – Définition de la probabilité conditionnelle

Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Pour tout événement B, on pose : $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

$\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, appelée **probabilité conditionnelle relative à A ou probabilité sachant A**.

Opérations avec $\mathbb{P}_A$

Puisque $\mathbb{P}_A$ est une loi de probabilité sur Ω, on retrouve les règles opératoires connues pour toute probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω.
Par exemple, on retrouve que : $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

Si vous décidez décrire une formule portant sur les probabilités conditionnelles qui n'est pas présente dans ce document, alors elle doit être démontrée car il fort probable qu'elle soit fausse !

Autre notation et lecture

Dès lors que tout a du sens, $\mathbb{P}_A(B)$ est aussi noté $\mathbb{P}(B|A)$.

La notation $\mathbb{P}_A(B)$ se lit « probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé » ou plus simplement « probabilité de B sachant A ».

□

Application| [3489] | 1| Manipuler les formules

On considère deux événements tels que :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) = 0{,}4 \\ \mathbb{P}(B) = 0{,}6 \\ \mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}7 \end{cases}$$

Calculer les probabilités suivantes :

(1). $\mathbb{P}(A \cap B)$

(2). $\mathbb{P}_A(B)$

(3). $\mathbb{P}_B(A)$

□

Application| [0637] | 2| Manipuler les formules de probabilités conditionnelles

On suppose disposer dans cet exercice d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ et l'on considère deux événements A et B tels que :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) = 0{,}5 \\ \mathbb{P}(B) = 0{,}4 \\ \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}6 \end{cases}$$

(1). Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.

(2). Calculer $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.

□

Application| [0641] | 3| Conditionnement

Une assemblée est constituée de 40 hommes et 60 femmes. Dans cette assemblée, 50 personnes ont les yeux bleus et 60% des hommes ont les yeux bleus. On choisit une personne au hasard.

(1). Calculer la probabilité des événements suivants :
- A : « la personne choisie est un homme »
- B : « la personne choisie est un homme aux yeux bleus »
- C : « la personne choisie est une femme aux yeux bleus »

(2).(a). Quelle est la probabilité que la personne désignée ait les yeux bleus, sachant que c'est une femme ?

(b). Quelle est la probabilité que la personne désignée soit une femme sachant qu'elle a les yeux bleus ?

□

3. Formule des probabilités composées

Théorème 2 – Probabilités composées

Pour deux événements

Si A est un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors $\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}_{\text{Formule des probabilités composée pour 2 événements}}$

Cas général

Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$

alors $\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}_{\text{Formule des probabilités composées pour } n \text{ événements}}$

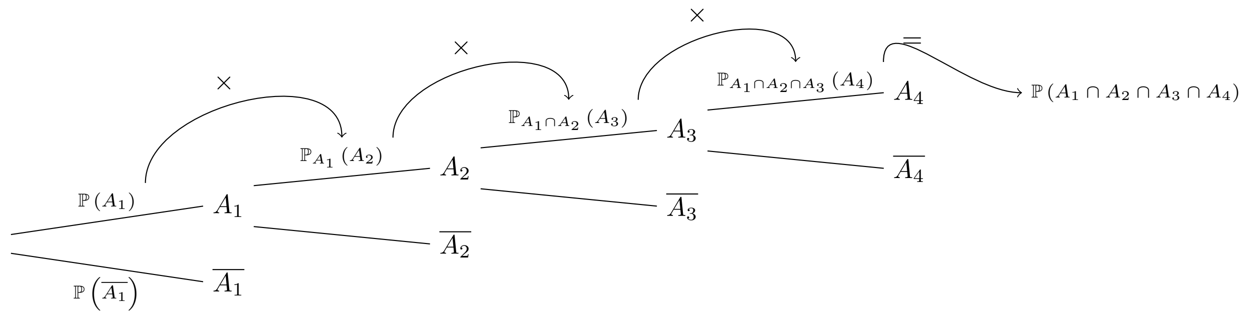
Sens des écritures

Toutes les probabilités écrites ici ont un sens puisque :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \ldots \cap A_j$$

donc $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_j) \geq \mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$.

Illustration de la formule pour une famille de 4 événements – Arbre pondéré à 4 étapes



Cas classique d'utilisation

On utilise souvent la formule des probabilités composées lorsque la situation étudiée peut s'apparenter à des tirages successifs dans une urne, la composition de l'urne étant modifée à l'issue de chaque tirage (en particulier lorsque les tirages sont effectués sans remise).

□

Éléments de preuve:

Application| [3490] | 4| Tirage successif dans une urne

Une urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires.

On tire successivement 3 boules sans remise.

Quelle est la probabilité d'obtenir les trois boules blanches ?

□

Application| [1251] | 5| Étude d'une succession de tirage dans une urne dont l'état évolue

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire.

On effectue des tirages dans cette urne de la façon suivante : *si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne avec 2 autres boules blanches, et si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne avec une autre boule noire.*

On note B_i : « la i^{e} boule tirée est blanche ».

(1). Calculer $\mathbb{P}(B_1)$, $\mathbb{P}(B_2)$ et $\mathbb{P}(B_3)$.

(2). Sachant que la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

(3). Sachant que la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit blanche ?

□

4. Formule des probabilités totales

Théorème 3 – Probabilités totales

Pour tout **événement** B, on a :

Pour le système complet d'événements $\{A, \overline{A}\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\end{aligned}$$

Généralisation aux systèmes complets d'événements

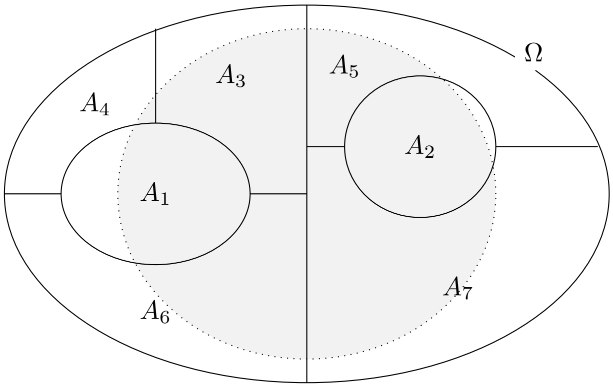
Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'évenements de probabilités **non nulles**.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}_{\text{Formule des probabilités totales}}\end{aligned}$$

Illustration et ébauche de preuve

L'événement B est ici représenté par la partie grisée. Puis $(A_1, \ldots, A_7)$ est un système complet d'événements, on peut écrire que :

$$B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_7)}_{\text{Réunion disjointe}}$$



Ainsi, on aura :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B \cap A_7)$$

Or comme $\begin{cases} \mathbb{P}(B \cap A_1) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) \\ \mathbb{P}(B \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(B \cap A_7) = \mathbb{P}(A_7) \times \mathbb{P}_{A_7}(B) \end{cases}$

Il vient alors que : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \ldots + \mathbb{P}(A_7) \times \mathbb{P}_{A_7}(B)$

$\square$

Éléments de preuve:

Application| [1250] **| 6| Probabilités conditionnelles**

Pierre propose à Paul le jeu suivant : Paul tire 5 cartes dans un jeu de 52 cartes, et il gagne si l'as de trèfle est parmi les cartes tirées.

(1). Quelle est la probabilité que Paul gagne ?

(2). Pierre décide de tricher et retire 10 cartes choisies au hasard. Quelle est la probabilité que Paul gagne ?

□

5. Formule de Bayes

Théorème 4 – Formule de Bayes

Formule pour deux événements

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle.

En remarquant que $\mathbb{P}(A \cap B) = \begin{cases} \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) \\ \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) \end{cases}$, il vient que : $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$

De plus, en utilisant le système complet d'événement $\{A, \overline{A}\}$, il vient que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$ et ainsi :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}$$

Généralisation

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'évenements de probabilité non nulles, et B un évenement de probabilité non nulle.

Alors, pour tout $i_0 \in I$, on a : $\mathbb{P}_B(A_{i_0}) = \dfrac{\mathbb{P}(A_{i_0})\mathbb{P}_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$

□

Application| [2334] | 7| Formule de Bayes

Dans un lot de piéces usinées, il y a 5% de pièces défectueuses. On contrôle les pièces à la sortie de l'usine, mais ce contrôle est aléatoire.

- Si une pièce est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 98% ;
- Si une pièce est bonne, elle est refusée avec une probabilité de 4% ;

On choisit au hasard une pièce que l'on contrôle.

(1). Déterminer la probabilité de l'événement « il y a une erreur dans le contrôle »

(2). Déterminer la probabilité que la pièce soit bonne sachant qu'elle est refusée.

(3). Déterminer la probabilité que la pièce soit mauvaise sachant qu'elle est refusée.

□

6. Indépendance de deux événements

Introduction 3 – Aspect intuitif de l'indépendance de deux événements

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

Intuitivement, A et B sont **indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ *si la probabilité de l'un est la même que l'on sache ou non que l'autre est réalisé*, c'est à dire si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Ces deux égalités équivalent à $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et cette relation a encore un sens si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$.

□

Définition 1 – Événéments indépendants

Deux événements A et B sont **indépendants pour la probabilité** $\mathbb{P}$ lorsque : $\underbrace{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}_{A \text{ et } B \text{ sont indépendants}}$

Importance de la loi de probabilité

Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. On donne ci-contre deux lois de probabilités $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
Pour $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ on a $A \cap B = \{2\}$.
Les événements A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}_1$ mais pas pour $\mathbb{P}_2$.

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}_1(\{i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}_2(\{i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

□

Éléments de preuve:

Théorème 5 – Événements indépendants liés à deux événements

Si A et B sont deux événements indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$, alors $\begin{cases} A \text{ et } \overline{B} \\ \overline{A} \text{ et } B \\ \overline{A} \text{ et } \overline{B} \end{cases}$ sont également indépendants pour $\mathbb{P}$.

□

Éléments de preuve:

Application| [1249] | 8| Étude de l'indépendance de deux événements

On dispose de deux dés D_1 et D_2 équilibrés. Les faces de D_1 sont numérotées de 1 à 6, tandis que D_2 possède 5 faces portant le numéro 1 et une face portant le numéro 6. On choisit au hasard un dé, et on le lance deux fois. On considère les événements :

- E : « le premier lancer donne la face numérotée 1 »
- F : « le deuxième lancer donne la face numérotée 1 »

(1). Calculer $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$.

(2).(a). Sachant que l'on a choisit le dé D_2, quelle est la probabilité de l'événement $E \cap F$?

(b). Calculer $\mathbb{P}(E \cap F)$.

(3). E et F sont-ils indépendants ?

□

7. Indépendance de n événements

Définition 2 – Indépendance et indépendance mutuelle

On considère n évenements $A_1, \dots, A_n$.

Indépendance deux à deux

On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$ tels que $i \neq j$, on a :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$$

Indépendance mutuelle

On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** pour la probabilité $\mathbb{P}$ si pour tout ensemble I d'indices choisis dans $[\![1; n]\!]$:

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Différence entre indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

Indépendants deux à deux

Pour montrer que les événements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont indépendants deux à deux, on doit montrer que :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4)
\end{array}$$

Mutuellement indépendants

Pour montrer que les événements A_1, A_2, A_3 et A_4 sont mutuelement indépendants, on doit montrer que :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) & = & \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}(A_4)
\end{array}$$

Situations classiques d'utilisation

La notion d'indépendance d'événements se rencontre dans les situations où l'on répète un certain nombre de fois la même expérience sans modification des conditions.
En particulier :

- on lance plusieurs fois un dé ou une pièce
- on effectue des tirages avec remise

□

Proposition 1 – Lien entre indépendance et indépendance mutuelle

Si des évenements sont mutuellement indépendants, alors sont deux à deux indépendants.

La réciproque est fausse : des événements deux à deux indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants.

□

Proposition 2 – Événements indépendants liés à deux événements

On considère n événements indépendants $A_1, \dots, A_n$.
Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les événements $B_1, \dots, B_n$ sont indépendants.

Toute famille d'événements formée à partir des événements $(A_1, \dots, A_n)$ et $(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n})$ est encore formée d'événements indépendants.

□

Application|[3492]| 9| Étude de l'indépendance d'événements

On lance deux fois un dé cubique parfait. Soient les événements :
A_1 : « le premier nombre obtenu est pair ».
A_2 : « le deuxième nombre obtenu est impair ».
A_3 : « la somme des deux nombres obtenus est paire ».
Étudier leur indépendance.

□

Application|[3493]| 10| Succession d'événements indépendants

Soit A_n l'événement « au cours des n premiers lancers d'un dé cubique parfaitement équilibré, on n'obtient aucun 6 ».
Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

□