PR01

Probabilités sur un univers fini

Version du 09-02-2023 à 12:59

1. Expérience aléatoire et vocabulaire

Définition 1 – Expérience aléatoire

- Certaines expériences entraînent des résultats aléatoires, c'est à dire qui dépendent du hasard. On les appelle expériences aléatoires ou épreuves aléatoires.

  Il s'agit donc d'expériences dont on connaît les issues ou éventualités possibles, mais dont on ne peut prévoir laquelle se réalisera.
- Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non. On les appelle événements.
- Tout événement qui n'est jamais réalisé est dit événement impossible et est noté $\varnothing$.
  Tout événement qui est toujours réalisé est dit événement certain.
- À chaque expérience aléatoire, on peut associer un ensemble Ω tel que chaque événement puisse être représenté par une partie de Ω.
  Ω est appelé univers des possibles ou univers des résultats observables.

□

Application| [3478] | 1| Quelques situations classiques

Dans chaque cas, décrire l'univers Ω associé à ces expériences aléatoires.

(1). Lancer un dé ;

(2). Lancer une pièce de monnaie ;

□

Contexte

Dans tout ce qui suit désormais, on considère une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ dont on note Ω l'univers des possibles et on suppose que Ω est un ensemble fini.

On dit dans ce cas que l'on travaille sur un univers fini.

□

Définition 2 – Événements et parties de Ω

- Un événement lié à cette expérience est donc un sous-ensemble de l'univers Ω, et dans ce cas, $\mathcal{P}(\Omega)$ étant l'ensemble de toutes les parties de Ω, il peut représenter l'ensemble des événements[a] associés à l'expérience aléatoire représentée par Ω.
- Les singletons $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ sont appelés les événements élémentaires. On parle aussi d'issues ou d'éventualités.
- Ω sera appelé l'événement certain et $\varnothing$ l'événement impossible.

a. sans pour autant que toutes les parties de Ω soit nécessairement pour décrire tous les événements de l'expérience

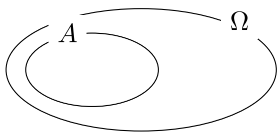
2. Événements et opérations sur les événements

Contexte

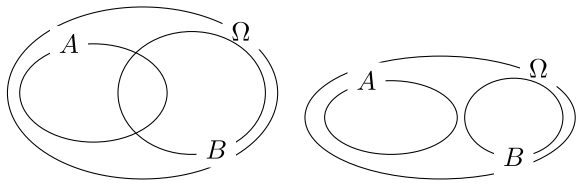
On considère A et B deux événements issus de la même expérience aléatoire d'univers Ω.

Définition 3 – Opérations sur les événements d'une expérience aléatoire

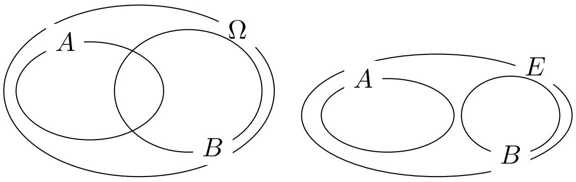
« le contraire de A s'est réalisé », événement appelé événement contraire de A qui correspond donc à $\overline{A}$;



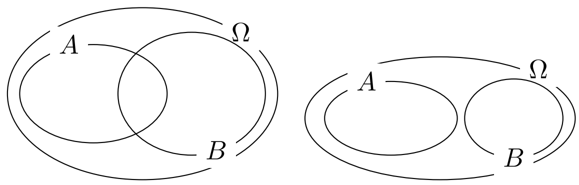
« A ou B se sont réalisés », c'est à dire l'un au moins des deux événements A ou B est réalisé au cours de cette expérience aléatoire, qui correspond donc à $A \cup B$;



« A et B se sont réalisés », c'est à dire A et B sont réalisés au cours de cette expérience aléatoire, qui correspond donc à $A \cap B$;

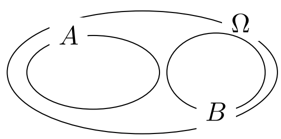


« A est réalisé mais pas B » qui correspond à donc à $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.



Événéments incompatibles

On dira que A et B sont deux événements incompatibles lorsque A et B ne peuvent se réaliser simultanément, c'est à dire lorsque $A \cap B = \varnothing$.



Application| [0555] | 2| Événements

Soit l'univers $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et les événements $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ et $C = \{3\}$.
Exprimer à l'aide de A, B et C les événements suivants, puis le décrire :

(1). l'un au moins des trois événements est réalisé ;

(2). un, et une seul des trois, est réalisé ;

(3). deux au moins, parmi les trois sont réalisés ;

(4). un, au plus, est réalisé.

□

Application| [0553] | 3| Événements

Soient A, B et C trois événements.

(1). Exprimer en fonction de A, B et C les événements dont la réalisation est à équivalente à celle de :

- **(a).** un au moins des trois événements ;
- **(b).** un et un seul ;
- **(c).** deux au moins ;
- **(d).** deux exactement.

(2). Si $A \cap \left(\overline{B} \cup C\right) = \varnothing$, montrer que la réalisation de A entraine celle de B et celle de $\overline{C}$.

□

Application| [3480] | 4| Événements incompatibles

(1). On choisit au hasard un lettre de l'alphabet et on considère les deux événements :

- C : « on obtient une consonne » ;
- V : « on obtient une voyelle ».

Sont-ils incompatibles ?

(2). On choisit un nombre au hasard entre 1 et 10, et on considère les deux événements :

- P : « on obtient un nombre pair » ;
- R : « on obtient un nombre premier ».

Sont-ils incompatibles ?

□

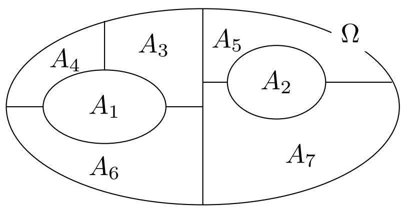
3 . Notion de système complet d'événements

Définition 4 – Système complet

Soit Ω l'univers associée à une expérience aléatoire, et $A_1, \ldots, A_n$ des événements.

On dit que la famille $\mathcal{F} = (A_1, \ldots, A_n)$ forme un système complet d'événements lorsque :

- $\underbrace{\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j =}_{\text{Les événements sont deux à deux incompatibles}}$
- $\underbrace{\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i}_{\text{Les événements « recouvrent » } \Omega}$



On dit aussi que la famille $\mathcal{F} = (A_1, \ldots, A_n)$ est une partition de Ω.

Systèmes complets triviaux

- Étant donné un événement A, le système $\left\{A, \overline{A}\right\}$ forme un système complet d'événements.
- Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, alors les événements élémentaires $\{\omega_i\}$ forment un système complet d'événements.

□

Exemple 1 – Partition et situations classiques

Une urne contient des cubes et des boules, de couleur rouge ou verte. On tire un objet de l'urne et on considère les événements ci-dessous.

Proposer trois systèmes complets d'événement.

A_1 : « l'objet tiré est un cube »

A_2 : « l'objet tiré est une boule »

A_3 : « l'objet tiré est un cube rouge »

A_4 : « l'objet tiré est rouge »

A_5 : « l'objet tiré est une boule rouge »

A_6 : « l'objet tiré est vert »

□

4 . Approche fréquentiste de la notion de probabilité

Introduction – Expérience aléatoire et probabilité d'une issue

On considère une expérience aléatoire pouvant conduire à plusieurs issues ou éventualités notées e_1, e_2, ..., e_m.

Univers Ω	Fréquences de réalisation	Probabilités de réalisation
e_1	f_1	p_1
e_2	f_2	p_2
e_3	f_3	p_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_i	f_i	p_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
e_m	f_m	p_m

Relevé statistique

On réalise l'expérience n fois et on procède à un relevé statistique des fréquences de réalisation de chaque issue e_1, e_2, ..., e_m.

Stabilisation des fréquences

En réalisant un très grand nombre de fois l'expérience, les fréquences observées se stabilisent vers une valeur que l'on appelle alors probabilité de réalisation.

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_m = 1 \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$$

Ainsi, pour cette expérience aléatoire :

À chaque événement élémentaire est associée sa probabilité p_1, p_2, ..., p_m qui est un nombre ayant les propriétés suivantes :

$$\forall i \in [\![1; m]\!],\ 0 \leq p_i \leq 1$$

$$\text{et } p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$$

À chaque événement A est associé sa probabilité notée $\mathbb{P}(A)$ définie comme étant la somme des probabilités p_i des événements élémentaires qui le constituent.

□

Exemple 2 – Lancer de dé

Les faces d'un dé cubique sont numérotées de 1 à 6 et la probabilité d'apparition d'un numéro est donné par le tableau ci-contre. Quelle est alors la probabilité lors, d'un lancer de ce dé, d'obtenir :

(1). Un numéro pair ?

(2). Un numéro impair ?

(3). Un numéro strictement supérieur à 3 ?

Numéro de la face	1	2	3	4	5	6
Probabilité d'apparition de la face	0,160	0,168	0,179	0,173	0,148	0,172

□

5 . Probabilité sur un univers fini

Définition 5 – Probabilité et espace probabilisé

Soit Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.
Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]$ vérifiant :

- $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, \quad A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini, et on dit parfois que $\mathbb{P}$ est la loi de probabilité.

En particulier, si A est un événement de Ω, alors : $\mathbb{P}(A) = \underbrace{\sum_{\omega \in A \cap \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})}_{\text{somme des probabilités des événements élémentaires constituant } A}$

□

Théorème 1 – Construction d'une probabilité

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.
Si $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres positifs de somme 1,
alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que : $\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

□

Application| [3481] | 5| Dé pipé

Un dé cubique pipé est tel que la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{3}$, tandis que les cinq autres événements élémentaires correspondant aux faces 1 à 5, ont la même probabilité.
Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

(1). Le dé tombe sur 3.

(2). Le dé tombe sur un nombre impair.

(3). Le dé tombe sur un nombre pair.

□

Application| [3482] | 6| Dé pipé

On dispose d'un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note p_i la probabilité de l'événement « le résultat du lancer est i », où $1 \leq i \leq 6$.

(1). Calculer sous forme de fraction irréductible $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ sachant que :
$p_2 = p_1$, $p_3 = 3p_1$, $p_4 = 2p_2$, $p_5 = 2p_1$, $p_6 = 3p_3$

(2). Calculer la probabilité de l'événement « obtenir un nombre pair ».

□

Application| [1275] | 7| Probabilités

On pipe un dé ordinaire à 6 faces de façon à ce qu'il ait les 3 propriétés suivantes :

Propriété 1 : la probabilité de sortir un nombre pair est égale à celle de sortir un nombre impair ;

Propriété 2 : les nombres impairs sont équiprobables ;

Propriété 3 : pour k pair, la probabilité de sortir la face numéro k, est proportionnelle à k.

(1). Pour chaque $k \in [\![1;6]\!]$, déterminer la probabilité de sortir la face numéro k.

(2). Déterminer la probabilité de sortir un nombre premier.

□

6. Événements et probabilités

Proposition 1 – Opérations sur les événements

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et soit A et B deux événements. On a :

- $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$ donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

□

Application| [3483] | 8| Manipuler les formules

Dans un univers Ω, on donne deux événements incompatibles A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,2$ et $\mathbb{P}(B) = 0,7$.
Calculer :

(1). $\mathbb{P}(A \cap B)$

(2). $\mathbb{P}(A \cup B)$

(3). $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$

(4). $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$

□

Application| [3484] | 9| Manipuler les formules

Dans un univers Ω, on donne deux événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = 0,8$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,4$.
Calculer :

(1). $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$

(2). $\mathbb{P}(B)$

(3). $\mathbb{P}(A \cap B)$

□

Application| [1274] | 10| Probabilité

A, B et C sont trois événements d'un même univers Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

On pose : $E_1 = A \cap (B \cup C)$ $\quad E_2 = A \cup (B \cap C)$ et $E_3 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

On suppose de plus que :

$$\mathbb{P}(A) = 0,6 \quad \mathbb{P}(B) = 0,4 \quad \mathbb{P}(C) = 0,3$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2 \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(C \cap A) = 0,1$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0,05$$

Déterminer la probabilité de E_1, de E_2 et de E_3.

□

7. Cas de l'équiprobabilité

Définition 6 – Notion d'équiprobabilité

On dit qu'il y a équiprobabilité, lorsque les probabilités de tous les événements élémentaires sont égales. On dit aussi que $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω.

En particulier : Si $\{\omega\}$ est un événement élémentaire, alors $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$.

□

Théorème 2 – Expression de la probabilité - Cas d'équiprobabilité

Si il y a équiprobabilité, pour tout événement A, alors on a : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card}\, A}{\text{card}\, \Omega}$.

On écrit aussi : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$, le terme « nombre de cas favorables » signifie ici « réalisant A ».

□

Application| [3485] | 11| Probabilités

Un architecte ne travaille en relation qu'avec quatre entreprises de construction A, B, C, D. On admet que lorsqu'un devis lui est adressé, chacune des quatre entreprises a la même probabilité d'en être l'expéditeur. On considère les événements suivants :

- E_1 : « le prochain devis provient de A »
- E_2 : « le prochain devis ne proviendra pas de C »
- E_3 : « le prochain devis proviendra de A ou de D »
- E_4 : « le prochain devis ne proviendra ni de B ni de C »

Calculer $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(E_2)$, $\mathbb{P}(E_3)$ et $\mathbb{P}(E_4)$.

□

Application| [2168] | 12| Le poker

On tire simultanément 5 cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité :

(1). p_1 de sortir l'as de pique et l'as de trêfle ?

(2). p_2 de sortir exactement deux as ?

(3). p_3 de sortir au moins deux as ?

(4). p_4 de sortir exactement deux as et deux rois ?

(5). p_5 de sortir une double paire ?

(6). p_6 de sortir exactement trois cartes de même hauteur ?

□

Application| [3486] | 13| Succession de lancers de pièces

On lance 5 fois de suite une même pièce équilibrée.

(1). Décrire l'univers des possibles Ω associé à cette expérience, puis proposer une loi de probabilité.

(2). Quelle est alors la probabilité que l'on ait eu exactement deux « pile » ?

□