PR11

Lois à densité usuelles

Version du 25-10-2022 à 18:32

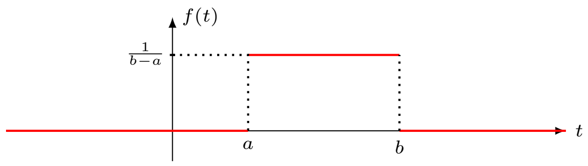
1. Loi uniforme

Définition 1 – Loi uniforme sur $[a, b]$ | $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$

On dit que X suit la loi uniforme sur $[a; b]$, lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b]).$$

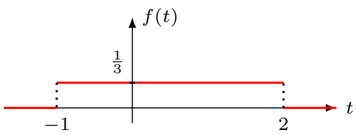


Extension à d'autres intervalles bornés

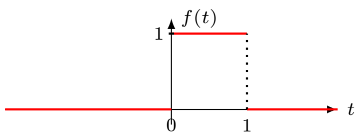
On définit de même la loi uniforme sur les intervalles $[a; b[$, $]a; b]$ et $]a; b[$.

Illustration

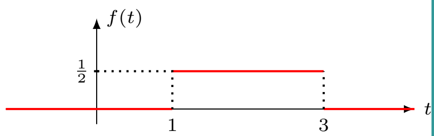
Densité de $\mathcal{U}([-1; 2])$



Densité de $\mathcal{U}([0; 1])$



Densité de $\mathcal{U}([1; 3])$



□

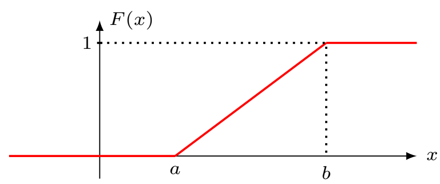
Il est immédiat que f est continue sur $]-\infty; a[\cup]a; b[\cup]b; +\infty[$ et y est positive, et que :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}t + \int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Théorème 1 – Fonction de répartition de la loi uniforme

La fonction F de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]a; b[$ est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad b < x \end{cases}$$



□

Théorème 2 – Espérance et variance d'une loi uniforme

Si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$,

alors X admet une espérance et une variance, et on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}} \qquad \boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.}$$

Lien avec la loi uniforme sur $[0,1]$

$$\left(\begin{array}{c} X \text{ suit la loi uniforme} \\ \mathcal{U}([0;1]) \text{ sur } [0;1] \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} Y = a+(b-a)X \\ \text{suit la loi uniforme } \mathcal{U}([a;b]) \end{array}\right)$$

□

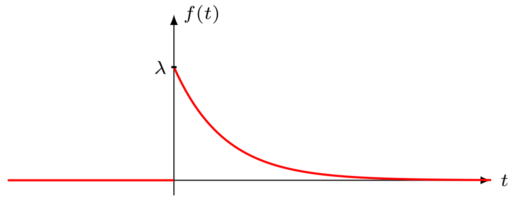
2. Loi exponentielle

Définition 2 – Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

Une variable aléatoire réelle X suit la **loi exponentielle de paramètre λ notée $\mathcal{E}(\lambda)$** lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

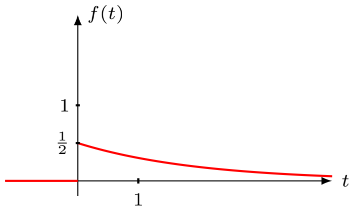
$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

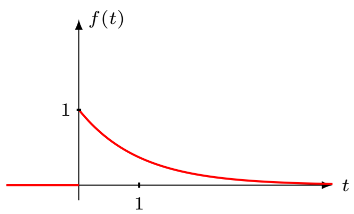


Illustration

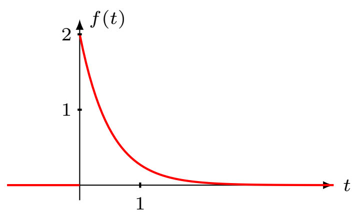
Densité de $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$



Densité de $\mathcal{E}(1)$



Densité de $\mathcal{E}(2)$



□

Il est immédiat que f est continue sur $\mathbb{R}^*$, positive et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et un calcul direct donne que $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1$ donc f est bien une densité de probabilité.

Théorème 3 – Espérance et variance d'une loi exponentielle

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et une variance $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

□

Éléments de preuve:

Proposition 1 – Fonction de répartition d'une loi exponentielle et application

Soit X une variable aléatoire réelle discrète qui suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

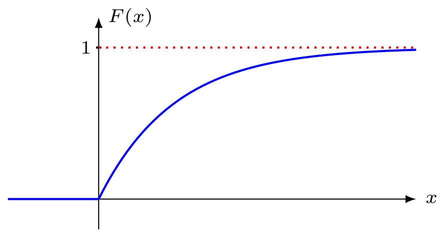
(1). Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq a \leq b$:

$$\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

(2). Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$: $\quad \mathbb{P}([X > a]) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

(3). La fonction de répartition F de X est donnée par :

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} & x \geq 0 \\ 0 & \text{si} & x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$



□

Éléments de preuve:

Théorème 4 – Caractérisation d'une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire réelle .

$$\left(\begin{array}{c} X \text{ suit une} \\ \text{loi exponentielle} \end{array} \right) \quad \Leftrightarrow \quad (\star) : \left\{ \begin{array}{l} X(\Omega) = \mathbb{R}_+ \\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}_{[X>s]}([X > s+t]) = \mathbb{P}([X > t]) \\ \forall s \in \mathbb{R}_+,\ \mathbb{P}([X > s]) \neq 0 \end{array} \right.$$

Interprétation

On parle en fait de variable aléatoire sans mémoire, et on peut voir les lois exponentielles comme les variantes continues des lois géométriques

La relation $\mathbb{P}_{[X>s]}([X > s+t]) = \mathbb{P}([X > t])$ traduit le fait que si X modélise la durée de vie d'un individu A, si A a vécu s année, la probabilité qu'il vive encore t années est la même que la probabilité pour qu'un individu similaire à A qui vient de naître vive lui aussi t années.

□

Éléments de preuve:

Supposons que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$: on a donc $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, et pour tout $s \geq 0$:

$$\mathbb{P}([X > s]) \quad = $$

Par ailleurs, pour tout $s \geq 0$ et $t \geq 0$, $s+t \geq 0$ et :

$$\mathbb{P}_{[X>s]}\left([X > s+t]\right) \quad =$$

Supposons que X vérifie les trois points de $(\star)$: Alors $\mathbb{P}\left([X > s+t]\right) = \mathbb{P}\left([X > s]\right) \times \mathbb{P}\left([X > t]\right)$. En notant G la fonction définie par $G(t) = \mathbb{P}\left([X > t]\right)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

- G est définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- pour tout $s \geq 0$ et $t \geq 0$, $G(s+t) = G(s) \times G(t)$.
- $G(1) \neq 0$
- G est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. En effet, F désignant la fonction de répartition de X, pour tout $t \geq 0$, $G(t) = 1 - \mathbb{P}\left([X \leq t]\right) = 1 - F(t)$ et F est croissante.
- On peut démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

On en déduit la fonction de répartition F de X :

$$F(x) =$$

F est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $[0; +\infty[$, $F(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$, donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus F est dérivable sauf peut-être en 0, et : $F'(x) =$

Donc F' est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Par suite X est une variable aléatoire réelle discrète et suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Exemple 1 – Majorer une probabilité

?

Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\mathbb{P}\left(X \geq \dfrac{3}{\lambda}\right) \leq \dfrac{1}{4}$.

On applique l'inégalité de Bienayme-Tchebychev à X dont l'espérance vaut $\dfrac{1}{\lambda}$ et la variance vaut $\dfrac{1}{\lambda^2}$. On obtient ainsi :

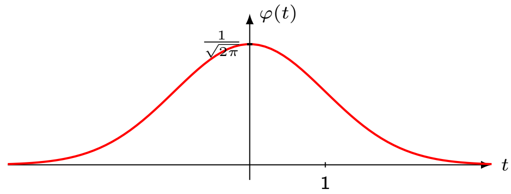
□

3 . Loi normale centrée réduite

Définition 3 – Loi normale centrée réduite

Une variable aléatoire réelle X suit **une loi normale centrée réduite** notée $\mathcal{N}(0,1)$, lorsque X admet pour densité la fonction φ définie par :

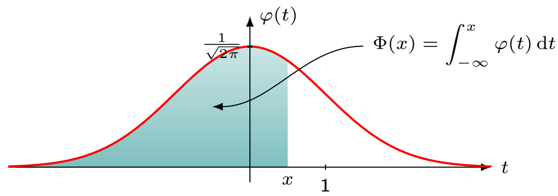
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$



Fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite

On note Φ l'application

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$



Φ désigne donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

□

φ est clairement continue et positive sur $\mathbb{R}$, et on montre donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1$.

φ est une fonction paire dont le tableau de variation sur $[0;+\infty[$ est le suivant puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

t	0 $\quad\quad$ $+\infty$
Signe de $\varphi'(t)$	$-$
Variations de φ	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\searrow$ 0

Théorème 5 – Espérance et variance de $\mathcal{N}(0,1)$

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors X admet une espérance et une variance, et on a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 1$$

□

Éléments de preuve:

- Sous réserve d'existence, $\displaystyle \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Pour tout $A > 0$, $\displaystyle\int_{0}^{A} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t =$

donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. Comme $t \longmapsto t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est impaire, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}x = 0$ ce qui prouve que X est d'espérance nulle.

- Sous réserve d'existance, $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

Pour tout $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t =$

Comme $-A\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ et que $t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Par suite, comme $t \longmapsto t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

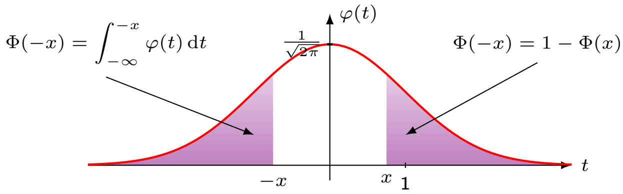
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$ ce qui prouve que $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 1$ et par suite $\mathbb{V}(X)$ existe et vaut 1.

Proposition 2 – Propriété de symétrie de Φ

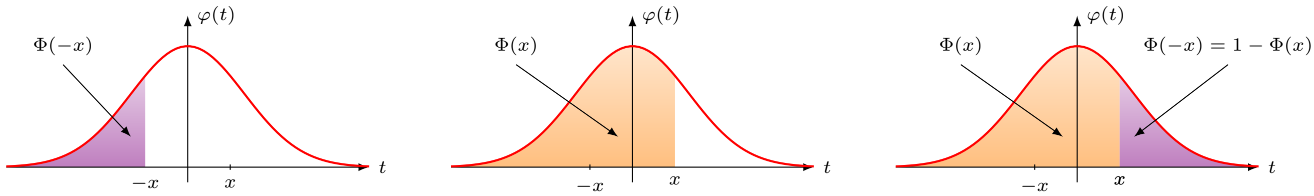
Φ étant la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

En particulier, on a $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.



Interprétation graphique



□

Éléments de preuve: En effectuant le changement de variable $t = -u$, on peut établir que : $\Phi(-x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{+\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$

Donc : $\Phi(-x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 1 - \Phi(x)$

Théorème 6 – Manipuler la fonction de répartition Φ de $\mathcal{N}(0,1)$

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X \geq x]) = 1 - \Phi(x)$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq b,\ \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}([-x \leq X \leq x]) = 2\Phi(x) - 1$$

□

Théorème 7 – Table de valeurs pour la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

□

Exemple 2 – Lecture de la table $\mathcal{N}(0,1)$

Donner les valeurs de $\Phi(0,2)$, $\Phi(1,56)$, $\Phi(-0.87)$ et $\Phi(-2.75)$.

□

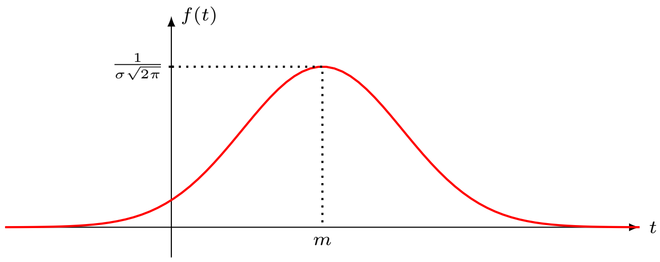
4. Loi de Laplace-Gauss

Définition 4 – Loi normale

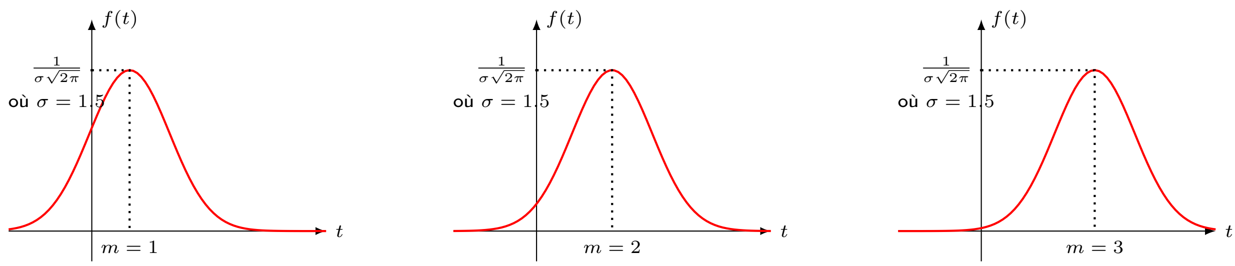
Une variable aléatoire réelle X suit **la loi normale ou loi de Laplace-Gauss** de paramètres m et $\sigma > 0$, notée $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}$$

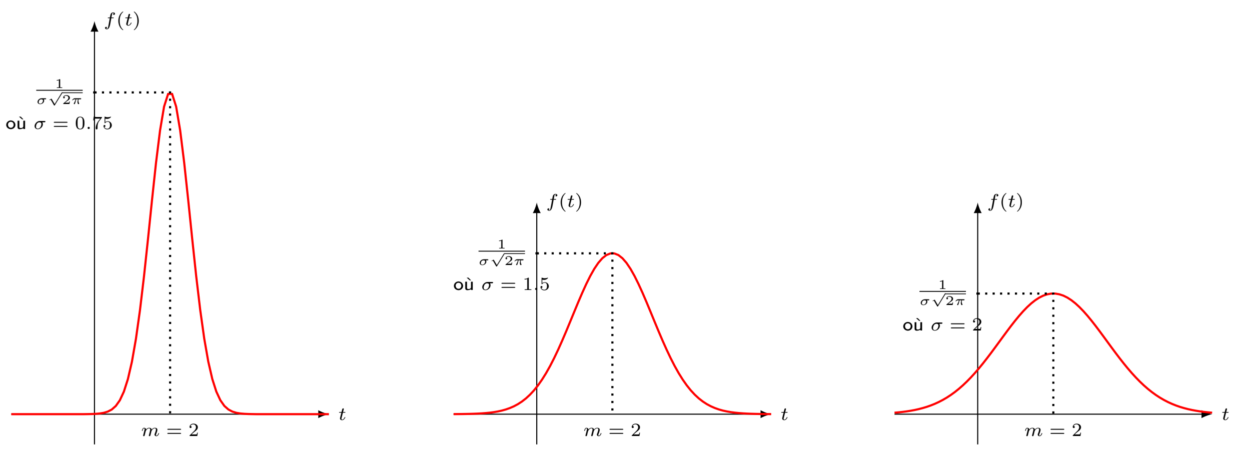
Allure générale de la densité



Incidence de la valeur de m à σ fixé



Incidence de la valeur de σ à m fixé



□

f est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et de plus en utilisant le changement de variables $u = \dfrac{t-m}{2}$ on montre que :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u}_{1}
\end{aligned}$$

Théorème 8 – Lien avec la loi normale centrée réduite

$$\left(\begin{array}{c} X \text{ suit la loi normale} \\ \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right) \\ \text{où } (m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{La variable aléatoire centrée} \\ \text{réduite } X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \text{ associée à } X \\ \text{suit la loi normale centré réduite } \mathcal{N}(0,1) \end{array}\right)$$

On remarquera que dans ce cas $X = \sigma X^* + m$.

Utilisation de la fonction Φ pour calculer une probabilité associée à $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ et soit $(a,b) \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$.

Puisque : $[a \leq X \leq b] = \left[\dfrac{a-m}{\sigma} \leq X^* \leq \dfrac{b-m}{\sigma}\right]$.

on a : $\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = \Phi\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)$

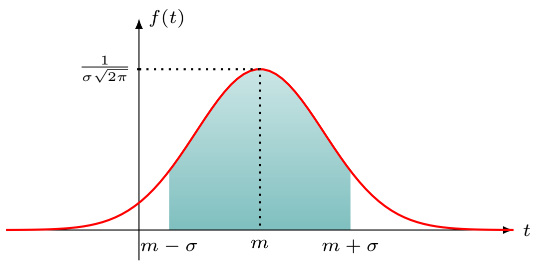
Exemple 3

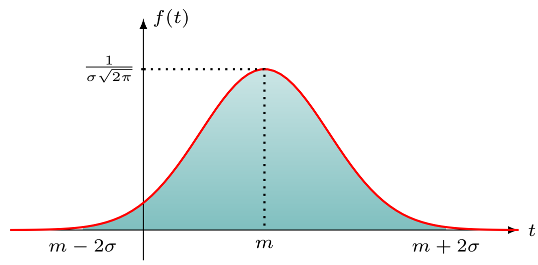
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(12,9)$. Déterminer $\mathbb{P}([X \leq 16])$ et $\mathbb{P}([9 \leq X \leq 15])$.

Proposition 3 – Dispersion d'une loi normale

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ avec $(m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,
alors $\mathbb{P}([m-\sigma \leq X \leq m+\sigma]) \approx 0,68$ et $\mathbb{P}([m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma]) \approx 0,95$.

Illustration





Éléments de preuve:

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $[-x \leq X^* \leq x] = [m-\sigma x \leq X \leq m+\sigma x]$ où $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$.

Ainsi : $\mathbb{P}([m-\sigma \leq X \leq m+\sigma]) =$

et $\mathbb{P}([m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma]) =$

Théorème 9 – Espérance et variance

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance : $E(X) = m$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Éléments de preuve:

Définition 5 – Fonction des quantiles

La fonction $\Phi : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0;1[$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$.

La fonction Φ^{-1} est alors appelée fonction des quantiles.

Pour tout $\alpha \in]0;1[$, on note $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ qui est alors appelé le quantile d'ordre α.

5. Fonction d'une variable aléatoire à densité

Exemple 4 – Densité et fonction de répartition de $Y = 2X-1$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 dont on note F la fonction de répartition et f une densité.

$Y = 2X-1$ est-elle une variable aléatoire à densité et si oui, déterminer sa fonction de répartition G et sa densité g

Fonction de répartition G de Y

Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\quad G(x) = \mathbb{P}([Y \leq X])$
$= \mathbb{P}([2X-1 \leq x])$
$=$

On en déduit donc que :

- Si $x < -1$, on a $G(x) =$
- Si $x \geq -1$, on a $G(x) =$

En conclusion : $G(x) =$ et il reste à prouver que

Densité g de Y

Une densité g de Y s'obtient en dérivant, sauf en -1, la fonction G et de choisir une valeur arbitraire en -1.

On obtient ainsi : $g(x) =$

□

Exemple 5 – Densité et fonction de répartition de $Y = X^2$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$

On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la uniforme sur $[-1; 1]$ dont on note F la fonction de répartition et f une densité.

? $Y = X^2$ est-elle une variable aléatoire à densité et si oui, déterminer sa fonction de répartition G et sa densité g

Fonction de répartition G de Y

Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \mathbb{P}([Y \leq X])$
$=$

On en déduit donc que :

En conclusion : $G(x) =$ et il reste à prouver que

Densité g de Y

On obtient ainsi : $g(x) =$

☐

Exemple 6 – Densité et fonction de répartition de $Y = \mathrm{e}^X$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la normale centrée réduite dont on note Φ la fonction de répartition et φ une densité.

? $Y = \mathrm{e}^X$ est-elle une variable aléatoire à densité et si oui, déterminer sa fonction de répartition G et sa densité g

Fonction de répartition G de Y

Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \mathbb{P}([Y \leq X])$

$=$

On en déduit donc que :

En conclusion : $G(x) =$ et il reste à prouver que

Densité g de Y

On obtient ainsi : $g(x) =$

□