PR10

Variables aléatoires à densité

Version du 25-10-2022 à 15:19

Contexte

Dans tout ce qui suit, on travaillera dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas nécessairement à décrire.

☐

1 . Fonction de répartition

Définition 1 – Fonction de répartition

On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs réelles.

On appelle fonction de répartition de X, la fonction F, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$$

☐

Proposition 1 – Propriétés générales d'une fonction de répartition

Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs rélles, alors :

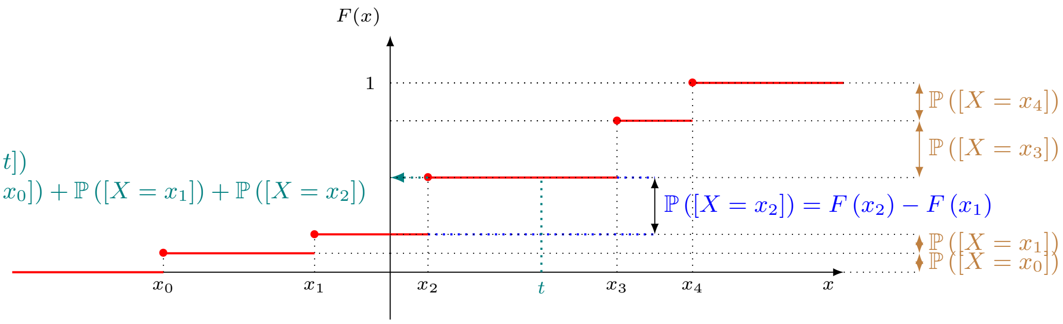
- F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- F est continue à droite en tout réel ;
- $F(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ $\quad$ $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Ces propriétés sont caractéristiques d'une fonction de répartition.

☐

Exemple 1 – Fonction de répartition d'une variable aléatoire à support fini où $X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathbb{P}([X \leq t]) \\ &= \mathbb{P}([X = x_0]) + \mathbb{P}([X = x_1]) + \mathbb{P}([X = x_2]) \end{aligned}$$



La fonction de répartition présente des points de discontinuité en chaque valeur prise par X.

☐

2. Variables aléatoires à densité

Définition 2 – Variable à densité

Variable à densité

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité lorsque sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Densité de probabilité

Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ à valeurs positives qui ne diffère de F' qu'en un nombre fini de points est appelé une densité de X.

On doit donc s'intéresser à la régularité de la fonction $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & F(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) \end{array} \right.$.

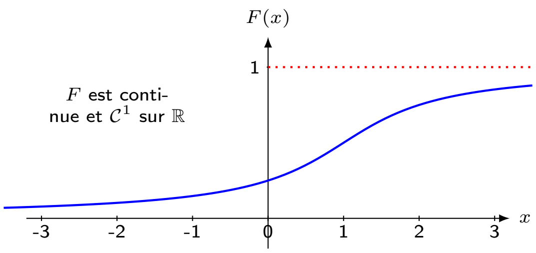
Caractérisation des fonctions de répartition pour une variable à densité

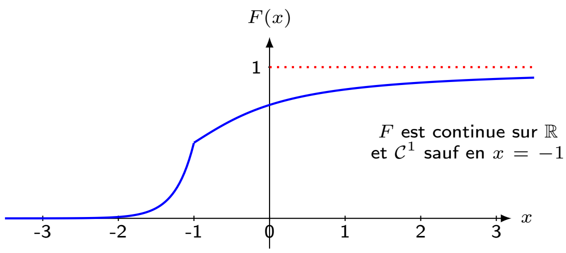
Toute fonction F qui satisfait aux conditions suivantes :

croissante sur $\mathbb{R}$	continue sur $\mathbb{R}$	classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points	$F(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Illustration





Attention !

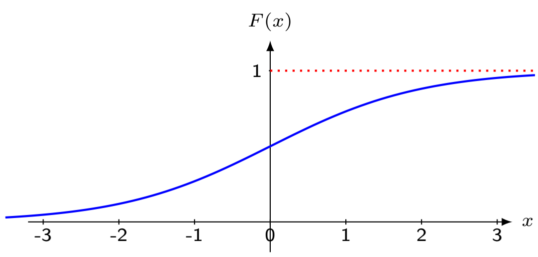
Une variable aléatoire réelle discrète X n'est pas une variable aléatoire réelle à densité puisque sa fonction de répartition est discontinue en toute valeur prise par X.

□

Exemple 2 – Fonction de répartition d'une variable à densité

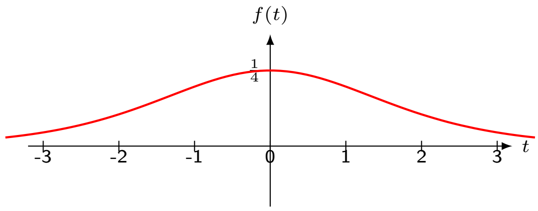
Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par $F(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
Ainsi définie, X est bien une variable aléatoire réelle à densité puisque :

F est croissante sur $\mathbb{R}$;
F est continue en tout point x de $\mathbb{R}$;
F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
F est telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;



La fonction f ci-dessous est une densité pour X :

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) & = & F'(t) \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})} \end{array}$$



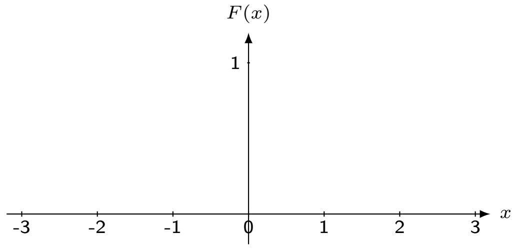
□

Exemple 3 – Fonction de répartition d'une loi uniforme

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \in [0;1[\\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$.

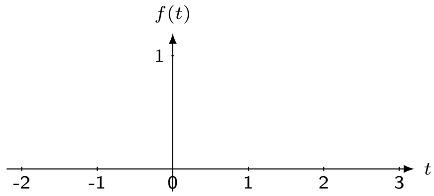
Ainsi définie, X est bien une variable aléatoire réelle à densité puisque :

F est croissante sur $\mathbb{R}$;
F est continue en tout point x de $\mathbb{R}$;
F est de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et en 1.
F est telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;



Une densité de X est alors :

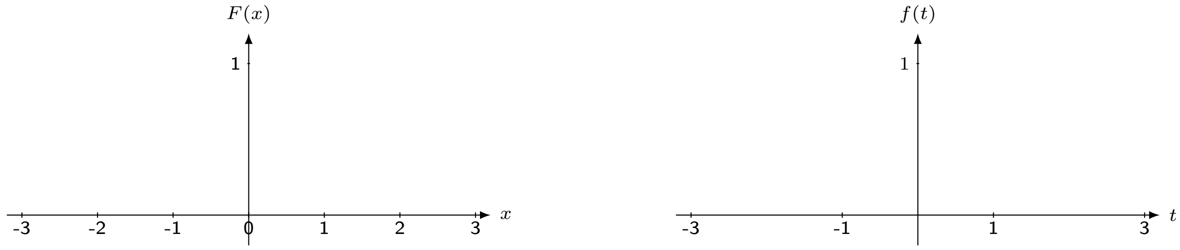
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \in [0;1] \\ 0 & \text{si} \quad 1 < t \end{cases}$$



□

Exemple 4

Montrer que $F : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ peut être la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et en donner une densité.



3. Densité et fonction de répartition

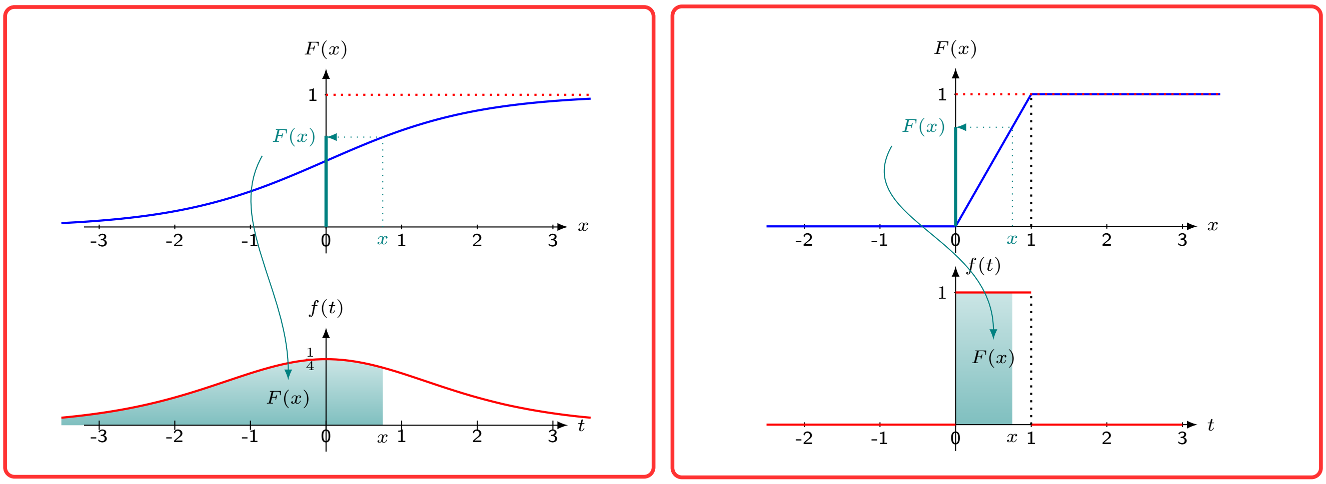
Théorème 1 – Lien entre fonction de répartion et densité | ADMIS

Soit X une variable aléatoire réelle à densité de fonction de répartition F.

Si f est une densité de X, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

En revenant à la définition d'une fonction de répartition : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X \leq x]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Illustration de $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$



Éléments de preuve: Soient $a_1, \ldots, a_n$ les points en lesquels F' n'est pas définie ou en lesquels f diffère de F'.
On suppose que $a_1 < \ldots < a_n$ et on pose $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $F(x)$.

- **1ᵉcas :** $x < a_1$
  F est une primitive de f sur $]-\infty; x]$, et comme $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $F(x)$.
- **2ᵉcas :** $a_p \leq x < a_{p+1}$ **avec** $p \in [\![1; n]\!]$
  F est une primitive sur chaque $]a_k; a_{k+1}[$ avec $k \in [\![0; p]\!]$ et donc sur $]a_p; x[$.
  De plus, F est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to y^-} F(t) = F(y) = \lim\limits_{t \to y^+} F(t)$.

Donc, pour tout $k \in [\![1; p-1]\!]$, $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{t \to a_{k+1}^-} F(t) - \lim_{t \to a_k^+} F(t) = F(a_{k+1}) - F(a_k)$$

De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{a_1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{a_1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(a_1)$.
De même, $\displaystyle\int_{a_p}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{a_p}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a_p)$.

Par suite, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_p}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, c'est à dire $F(a_1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} (F(a_{k+1} - F(a_k)) +$ $(F(x) - F(a_p))$, et finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$.

Exemple 5 – Premier calcul de probabilité

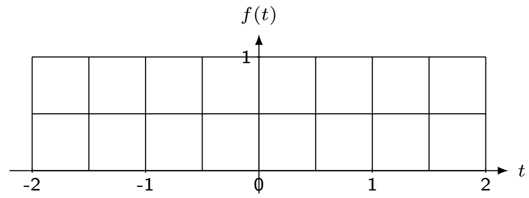
Calculer $\mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{\pi}{4}\right]\right)$ pour X de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos(t) & \text{si} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$.

☐

Exemple 6 – De la densité à la fonction de répartition

On considère la variable aléatoire X de densité f où :

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si} \quad t \in [-1; 0[\\ -t+1 & \text{si} \quad t \in [0; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Représenter f ci-dessus et donner la fonction de répartition de F.

☐

Application| [4741] | 1| Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire de densité la fonction f où :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer la fonction de répartition de X. □

4 . Fonction densité

Théorème 2 – Théorème caractéristique pour les densités | ADMIS

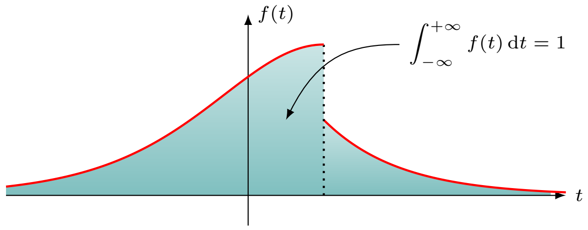
Une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si, et seulement si :

f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

L'intégrale doit bien sûr être convergente



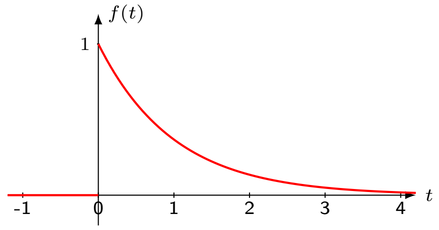
□

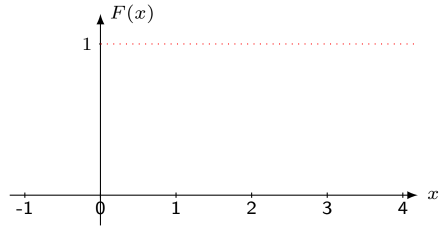
Éléments de preuve:

- Supposons que f soit la densité d'une variable aléatoire réelle X. Par définition, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après le théorème précédent, $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où comme $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
- Pour la réciproque, il suffit de montrer que l'application $F : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, qui est bien définie car f est positive continue sur $\mathbb{R}$ d'intégrale sur $\mathbb{R}$ convergente, est croissante, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point, ce qui montrera que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Exemple 7 – Densité d'une loi exponentielle et fonction de répartition

Vérifier que l'on définit bien une densité de probabilité en posant $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, puis donner et construire la fonction de répartition correspondante.

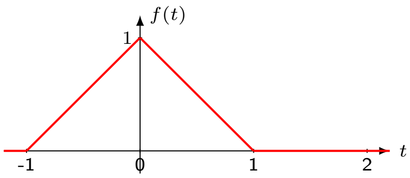


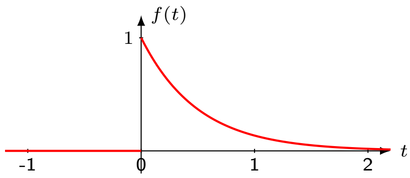


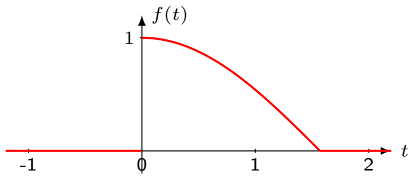
☐

Exemple 8 – Densité ou pas densité ?

Déterminer graphiquement, parmi les fonctions f ci-dessous, celles qui peuvent être une densité de probabilité ?







☐

Exemple 9 – Ajuster une densité

Quelle valeur donner à α pour que la fonction f donnée par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 1 \\ \dfrac{\alpha}{t\sqrt{t}} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$ soit une densité de probabilité ?

☐

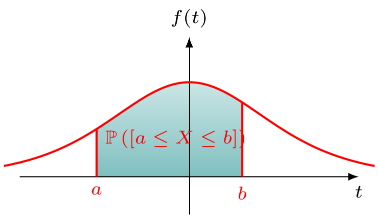
5. Probabilités et variable aléatoire réelle à densité

Théorème 3 – Lien probabilité | Densité | Fonction de répartition

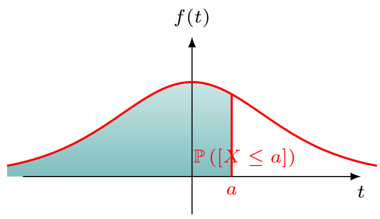
Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$:

$$\mathbb{P}([X = a]) = 0$$

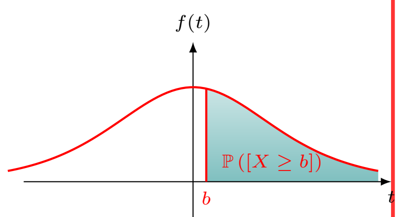
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([a < X < b]) \\ = \ & \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ = \ & \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) \\ = \ & \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ = \ & \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X < a]) &= \mathbb{P}([X \leq a]) \\ &= \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > b]) &= \mathbb{P}([X \geq b]) \\ &= \int_{b}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$



□

Éléments de preuve: Soit F la fonction de répartition de f.

$\mathbb{P}([X = a]) = \ldots$: Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \mathbb{P}([X = a]) \leq \mathbb{P}\left(\left[a - \frac{1}{n} < X \leq a\right]\right)$.

Or $\mathbb{P}\left(\left[a - \frac{1}{n} < X \leq a\right]\right) = F(a) - F\left(a - \frac{1}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} F\left(a - \frac{1}{n}\right) = F(a)$ car F est continue sur $\mathbb{R}$ donc en a.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[a - \frac{1}{n} < X \leq a\right]\right) = 0$ et $\mathbb{P}([X = a]) = 0$.

$\mathbb{P}([a < X < b]) = \ldots$: Si a et b sont tels que $a \leq b$, on sait que :

$$\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $\mathbb{P}([a < X \leq b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et comme $\mathbb{P}([X = a]) = 0 = \mathbb{P}([X = b])$, on a :

$$\mathbb{P}([a < X < b]) = \mathbb{P}([a \leq X < b]) = \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = \mathbb{P}([a < X \leq b])$$

$\mathbb{P}([X < a]) = \ldots$: $\mathbb{P}([X \leq a]) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ et comme $\mathbb{P}([X = a]) = 0$, on a $\mathbb{P}([X < a]) = \mathbb{P}([X \leq a])$

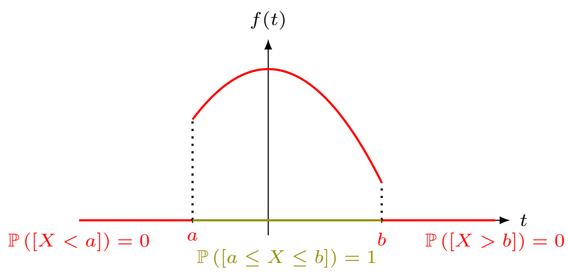
$\mathbb{P}([X > b]) = \ldots$: $\mathbb{P}([X > b]) = \mathbb{P}([X \geq b])$ car $\mathbb{P}([X = b]) = 0$ et $\mathbb{P}([X > b]) = 1 - \mathbb{P}([X \leq b]) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Donc $\mathbb{P}([X > b]) = \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition 2 – Nullité presque partout

Si la densité f est nulle en dehors de l'intervalle $[a;b]$, alors $\mathbb{P}([X < a]) = 0$ et $\mathbb{P}([X > b]) = 0$ donc X prend ses valeurs presque sûrement dans $[a;b]$.

Si X est une variable à densité qui ne prend ses valeurs que dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors sa densité est nulle en dehors de I sauf éventuellement en un nombre fini de points.



□

6. Espérance d'une variable aléatoire réelle à densité

Définition 3 – Espérance d'une variable aléatoire réelle à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et f une densité de X.

Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ est ABSOLUMENT convergente, alors on dit que X admet une **espérance** notée $\mathbb{E}(X)$ et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Terminologie

$\mathbb{E}(X)$ est appelé le **moment d'ordre 1 de** X ou encore **moyenne** de X.

Lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une variable aléatoire centrée.

Choix de « la » densité

Cette définition est indépendante de la densité de X choisie car deux densités de X ne diffèrent qu'en un nombre fini de points.

□

Exemple 10 – Espérance d'une loi exponentielle

?

Montrer que la variable aléatoire X de densité $f : t \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ admet une espérance, puis la déterminer.

□

Exemple 11 – Loi de Cauchy : variable aléatoire réelle n'admettant pas d'espérance

?

La variable aléatoire X de densité $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\pi\,(1+t^2)}$ admet-elle une espérance ?

□

Théorème 4 – Positivité de l'espérance

Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant une espérance.

Si $\mathbb{P}([X \geq 0]) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

C'est à dire qu'une variable aléatoire à densité qui ne prend que des valeurs positives, a nécessairement une espérance positive.

Linéarité de l'espérance et croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant une espérance,
alors la variable aléatoire $X + Y$ admet une espérance et on a $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles admettant une espérance telles que $X \leq Y$,
alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Pour les deux énoncés, il n'y a aucune hypothèse supplémentaire sur la nature des variables aléatoires.

Généralisation de la linéarité de l'espérance

Si $X_1, \ldots X_p$ sont p variables aléatoires admettant une espérance, alors pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ la variable aléatoire $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_p X_p$ admet une espérance et on a $\mathbb{E}(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_p X_p) = \lambda_1 \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \lambda_p \mathbb{E}(X_p)$.

$\square$

Éléments de preuve:
Pour tout $x < 0$, $0 \leq \mathbb{P}([X \leq x]) \leq \mathbb{P}([X < 0]) = 0$, donc $\mathbb{P}([X \leq x]) = 0$ et la fonction de répartition F de X est nulle sur $]-\infty; 0[$.
Comme pour tout $x < 0$, $F'(x) = 0$, X admet une densité f telle que $f(x) = 0$ pour tout $x < 0$. On en déduit que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Le fonction $x \longmapsto x f(x)$ est positive sur $[0; +\infty[$ donc $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

Proposition 3 – Variable centrée

Si X admet une espérance, alors $X - \mathbb{E}(X)$ admet une espérance qui vaut 0.

$X - \mathbb{E}(X)$ est appelée **variable aléatoire réelle centrée associée à** X

$\square$

Théorème 5 – Théorème du transfert | ADMIS

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t)\,\mathrm{d}t$ est ABSOLUMENT convergente,

alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance et $\mathbb{E}(g(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\square$

Exemple 12

? Déterminer l'espérance de Y où $Y = X^2$ avec X de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{9\ln(t)}{t^4} & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$.

□

7 . Moment d'ordre deux

Définition 4 – Moment d'ordre 2

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et f une densité de X.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument),

alors on dit que X admet un moment d'ordre 2 notée $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ avec :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Extension – Moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ pour une variable aléatoire à densité

On définit de manière plus générale les moments d'ordre supérieur.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument),

alors on dit que X admet un moment d'ordre k notée $\mathbb{E}\left(X^k\right)$ avec :

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Convergence absolue ou convergence ?

Pour le moment d'ordre 2, la fonction $t \longmapsto t^2 f(t)$ est clairement à valeurs positives, donc il y a équivalence entre convergence et convergence absolue pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Par contre, pour la fonction $t \longmapsto t^k f(t)$, la parité de k induit ou non un changement de signe de cette fonction, d'où la nécessité de parler de convergence absolue dans le cas général.

□

Proposition 4 – Moment d'ordre 2 et espérance

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et f une densité de X.
Si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

□

Éléments de preuve: Par hypothèse sur X^2, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Il est immédiat que : $\forall t \in [-1;1]\,,\ |tf(t)| \leq |f(t)| = f(t)$

Par ailleurs : $\forall t \geq 1,\ |tf(t)| \leq t^2 f(t)$

De plus, on a : $\forall t \leq -1,\ |tf(t)| \leq t^2 f(t)$

8 . Variance et écart-type

Définition 5 – Variance et écart-type d'une variable aléatoire à densité

Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

Variance

On dit que X admet une variance notée $\mathbb{V}(X)$ lorsque les variables aléatoires

$$X \text{ et } (X - \mathbb{E}(X))^2$$

admettent une espérance.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

$$\mathbb{V}(X) \geq 0$$

Conséquence de la positivité de l'espérance

Écart-type

L'écart-type de X est alors le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Lorsque $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une variable aléatoire réelle réduite.

□

Théorème 6 – Formule de Huygens

Si X est une variable aléatoire réelle à densité telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe,

alors X admet une variance et on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

□

Éléments de preuve:

Proposition 5 – Variance de $aX+b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

Si X est une variable aléatoire réelle à densité qui admet une variance,

alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la variable aléatoire $aX+b$ admet une variance.

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$$

$$\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$$

Variable centrée réduite associée

Si X une variable aléatoire réelle à densité admettant un moment d'ordre 2 et un écart-type non-nul,

alors la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Si f est une densité de X,

alors la fonction

$$f^* : t \longmapsto \sigma(X) f\left(\mathbb{E}(X) + \sigma(X)t\right)$$

est une densité de X^*.

Terminologie

X^* est souvent appelée variable aléatoire réelle centrée réduite associée à X.

□

Éléments de preuve:

9. Dispersion d'une variable aléatoire

Théorème 7 – Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire réelle discrète ou à densité à valeurs positives admettant une espérance,

alors : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$.

□

Éléments de preuve:

Pour X est une variable aléatoire réelle discrète : en notant $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in I\}$ où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$. Par définition de $\mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{\substack{k\in I\\ x_k \leq \varepsilon}} x_k \mathbb{P}([X = x_k]) + \sum_{\substack{k\in I\\ x_k \geq \varepsilon}} x_k \mathbb{P}([X = x_k]) \\
&\geq \sum_{\substack{k\in I\\ x_k \geq \varepsilon}} x_k \mathbb{P}([X = x_k]) \\
&\geq \varepsilon \sum_{\substack{k\in I\\ x_k \geq \varepsilon}} \mathbb{P}([X = x_k]) \\
&\geq \varepsilon \mathbb{P}([X \geq \varepsilon])
\end{aligned}$$

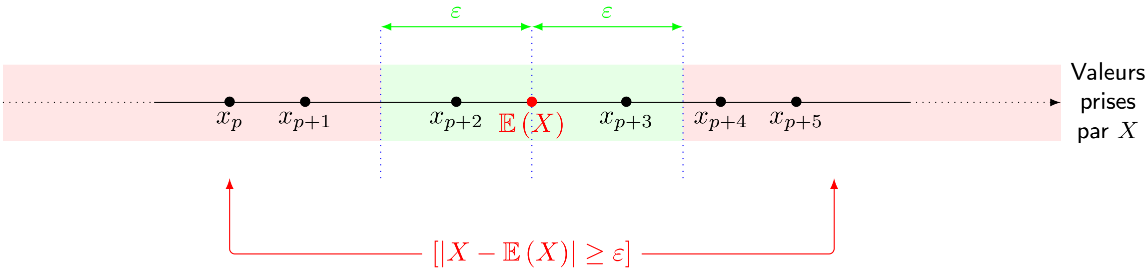
Pour X est une variable aléatoire réelle de densité f : en revenant à la définition de $\mathbb{E}(X)$:

Théorème 8 – Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

Si X est une variable aléatoire réelle discrète ou à densité admettant un moment d'ordre 2,

alors : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}\left(X\right)| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$

Illustration dans le cas d'une variable aléatoire réelle discrète



$\mathbb{P}\left([|X - E(X)| \geq \varepsilon]\right)$ est la probabilité pour que X prenne des valeurs éloignées de $\mathbb{E}\left(X\right)$ d'au moins ε. Cette probabilité est d'autant plus faible que $\mathbb{V}(X)$ est plus petite et que ε est plus grand.

□

Éléments de preuve: C'est une conséquence de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire réelle $\left(X - \mathbb{E}\left(X\right)\right)^2$.

10 . Indépendance de variables aléatoire à densité

Définition 6 – Indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité.

On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque pour tous intervalles I et J de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\left([X \in I] \cap [Y \in J]\right) = \mathbb{P}\left([X \in I]\right) \times \mathbb{P}\left([Y \in J]\right)$$

Extension à une famille de n variables aléatoires à densité

On dit que les n variables aléatoires à densité $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes lorsque pour tous $I_1, \ldots, I_n$ intervalles de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}\left([X_1 \in I_1] \cap \ldots \cap [X_n \in I_n]\right) = \mathbb{P}\left([X_1 \in I_1]\right) \times \ldots \times \mathbb{P}\left([X_n \in I_n]\right)$$

□

Théorème 9 – Espérance et variance de variables aléatoires à densité indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité **indépendantes** admettant une espérance et une variance,

alors les variables aléatoires $X+Y$ et $X \times Y$ admettent une espérance et une variance, et on a :

X et Y indépendantes

$$\mathbb{E}(X \times Y) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

Extension à n variables aléatoires à densité

Ce résultat s'étend naturellement à n variables alátoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes où l'on aura sous réserve que tout ait du sens : $\mathbb{E}(X_1 \times \ldots \times X_n) = \mathbb{E}(X_1) \times \ldots \times \mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n)$.

□

Définition 7 – Covariance de deux variables aléatoires à densité

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance.

On définit la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$ de X et Y comme étant l'espérance de la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$, c'est à dire :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Problèmes sous-jacent à cette définition

Le calcul de l'espérance de la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ sous-entend que l'on doit disposer d'une densité de cette variable aléatoire.

Coefficient de corrélation linéaire

Si on suppose de plus que X et Y admettent une variance non nulle, on appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y le réel $\rho(X,Y)$ de l'intervalle $[-1;1]$ défini par :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}.$$

□

Théorème 10 – Formule de Huygens pour la covariance et indépendance

Formule de Huygens

Si X et Y sont deux variables aléatoires qui admettent une covariance,
alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

C'est le moyen utilisé en général pour calculer une covariance.

Indépendance et covariance

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes,
alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

La réciproque est fausse.

□

Éléments de preuve: