FN04

Autour d'exponentielle et du logarithme

Version du 24-11-2022 à 13:04

1. La fonction logarithme népérien

Proposition 1 – Ses particularités

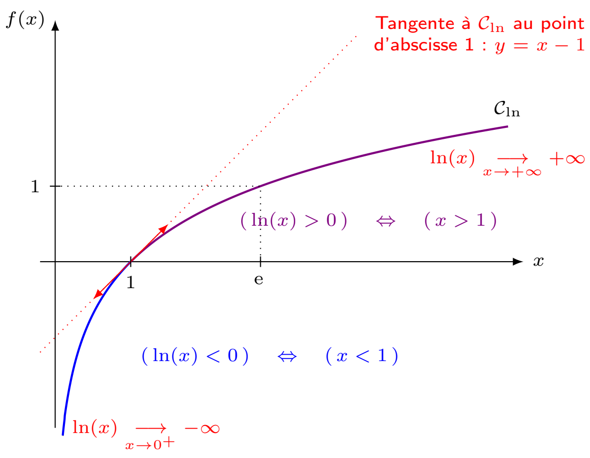
$\ln$ est **définie** et **dérivable** sur $]0;+\infty[$.	$\ln(x) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \dfrac{1}{x}$	$\ln$ est **strictement croissante sur** $]0;+\infty[$.
$\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.	$(\ln(x) > 0) \Leftrightarrow (x > 1)$	

Relation fondamentale et formules de calculs

Pour tous réels a et b **strictement positifs** :

$\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$	$\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$	$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
$\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$	$\ln(a^n) = n\ln(a)$ où $n \in \mathbb{Z}$	

Courbe représentative et limites



□

Application|[1829]| 1| Propriétés algébriques

Simplifier les écritures suivantes :

$\ln\left(\mathrm{e}^{2}\right) = \dots\dots\dots\dots$	$\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \dots\dots\dots\dots$	$\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dots\dots\dots\dots$
$2\ln\left(\mathrm{e}^{3}\right) = \dots\dots\dots\dots$	$\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) = \dots\dots\dots\dots$	$\ln\left(\mathrm{e}^{2}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{4}}\right) = \dots\dots\dots$

☐

Application|[1830]| 2| Propriétés algébriques

Montrer que : $\ln\left(2-\sqrt{3}\right) + \ln\left(2+\sqrt{3}\right) = 0.$

☐

2. La fonction exponentielle

Définition 1 – Fonction exponentielle

On appelle **foncton exponentielle de base** e, et on note $\exp$, la fonction qui à tout réel x associe l'unique réel y tel que $\ln(y) = x$:

$$\exp : \left|\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0;+\infty[\\ x & \longmapsto & y = \exp(x) \text{ tel que } \ln(y) = x \end{array}\right.$$

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont **réciproques** l'une de l'autre avec en particulier :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) = x$ | $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$

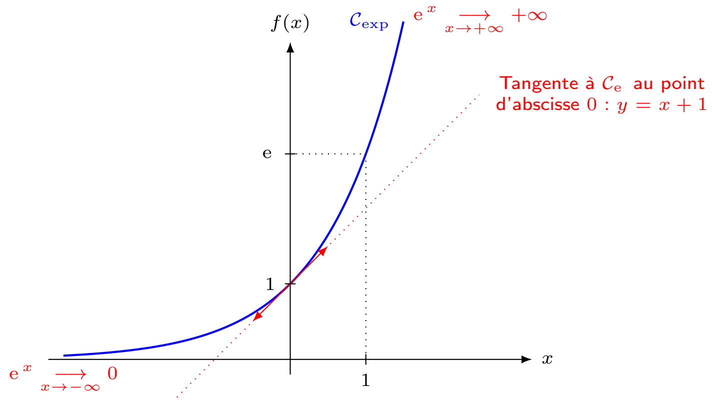
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée elle même : $\mathrm{e}^{x} \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \mathrm{e}^{x}$

☐

Proposition 2 – Propriétés immédiates avec la notation e^{x} et relation fondamentale

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{x} > 0$	$\mathrm{e}^{0} = 1$ et $\mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{n} = \mathrm{e}^{nx}$	$\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} = \mathrm{e}^{-x}$	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}} = \mathrm{e}^{x-y}$

Courbe représentative et limites



□

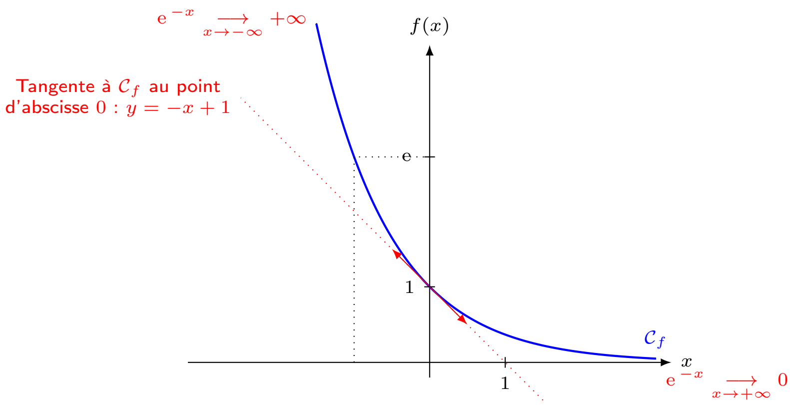
Application | [1832] | 3| Propriétés d'exponentielle

Écrire le plus simplement possible les expressions suivantes :

$e^{3\ln(x)}$ où $x \in]0;+\infty[$.	$\ln\left(\dfrac{1}{e^{x}}\right)$ où $x \in \mathbb{R}$.	$\ln\left(3e^{x}\right)$ où $x \in \mathbb{R}$.
$e^{\frac{1}{2}\ln(x)}$ où $x \in]0;+\infty[$.	$e^{-2\ln(x)}$ où $x > 0$.	$\ln\left(\dfrac{1}{e^{-2x}}\right)$ où $x \in \mathbb{R}$.
$\ln\left(\sqrt{e^{x}}\right)$ où $x \in \mathbb{R}$.	$\ln\left(\dfrac{1}{5}e^{x}\right)$, où $x \in \mathbb{R}$.	

□

Proposition 3 – Du côté de $f : x \longmapsto e^{-x}$



□

3. Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Contexte

Dans tout ce paragraphe, sauf mention contraire, α et β désigneront deux réels quelconques. □

Définition 2 – Puissance d'un réel et fonction $x \longmapsto x^\alpha$

x^α | « x à la puissance α » | $x > 0$

$$x^\alpha = \underbrace{\mathrm{e}^{\,\alpha\ln(x)}}_{>0}$$

Fonction puissance d'exposant α

$$f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\,\alpha\ln(x)} \end{array}$$

Exemple

$$\begin{aligned} x^{1,5} &= \mathrm{e}^{\,1,5\times\ln(x)} & x^{-0,3} &= \mathrm{e}^{\,-0,3\times\ln(x)} \\ x^{\pi} &= \mathrm{e}^{\,\pi\times\ln(x)} & x^{\sqrt{2}} &= \mathrm{e}^{\,\sqrt{2}\times\ln(x)} \\ 2^{t} &= \mathrm{e}^{\,t\times\ln(2)} & 3^{-t} &= \mathrm{e}^{\,-t\times\ln(3)} \end{aligned}$$

Cohérence de la définition

$$\begin{aligned} x^n &= \mathrm{e}^{\,n\ln(x)} \\ &= \mathrm{e}^{\,\ln(x)+\ln(x)+\ldots+\ln(x)} \\ &= \mathrm{e}^{\,\ln(x)} \times \ldots \mathrm{e}^{\,\ln(x)} \\ &= \underbrace{x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ facteurs}} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^0 = \mathrm{e}^{\,0\ln(x)} = 1$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$1^\alpha = \mathrm{e}^{\,\alpha\ln(1)} = 1$$

Ainsi, la **courbe représentative** de $x \longmapsto x^\alpha$ **passe toujours par le point** $(1, 1)$. □

Proposition 4 – Opérations avec les puissances d'un nombre

$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Limites en 0 et $+\infty$ de $x \longmapsto x^\alpha$

Cas où $\alpha = 0$

La fonction $x \longmapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.

Cas où $\alpha < 0$

On aura $\mathrm{e}^{\,\alpha\ln x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{e}^{\,\alpha\ln(x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Cas où $\alpha > 0$

On aura $\mathrm{e}^{\,\alpha\ln x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{e}^{\,\alpha\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

⚠ On pourrait dans le cas $\alpha > 0$ définir par prolongement 0^α en posant $0^\alpha = 0$.

Dérivée d'une fonction puissance

La fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée : $x^\alpha \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \alpha x^{\alpha-1}$ □

Proposition 5 – Variations d'une fonction puissance | Représentation graphique

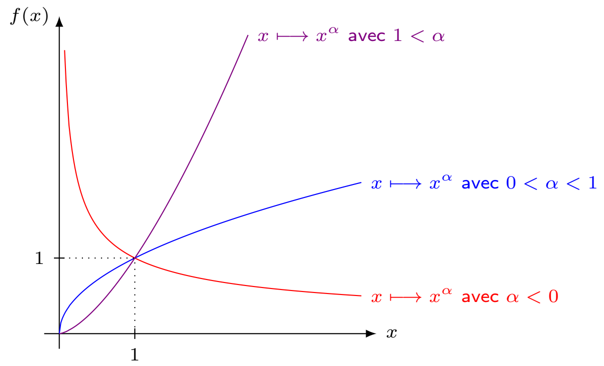
Cas où $\alpha < 0$

x	0	$+\infty$
Variations de $x \longmapsto x^\alpha$	$+\infty$ $\searrow$	0

Cas où $\alpha > 0$

x	0	$+\infty$
Variations de $x \longmapsto x^\alpha$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Allure des représentations graphiques



□

Théorème 1 – Croissances comparées

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels :

$$\frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x^\alpha\,|\ln(x)|^\beta \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0 \qquad \frac{\mathrm{e}^{\beta x}}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad |x|^\alpha\,\mathrm{e}^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Application| [2670] | 4| Dériver une fonction puissance

Soit $f : x \longmapsto x^{2,3}$. Calculer $2,3f(x) - xf'(x)$ pour tout $x > 0$.

□

Application| [2671] | 5| Étudier une fonction puissance

Soit $f : \left|\begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{x^3}} \end{array}\right.$.

(1). Écrire $f(x)$ sous la forme x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2). Étudier la fonction f sur $]0;+\infty[$.

□